Unidad Didáctica
Derivadas y cálculo diferencial

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad: Matemáticas | Curso: 2015-2016

Autor: Carlos Pascual León
Supervisión: D. Luis Rico Romero

ugr Universidad de Granada

Universidad de Granada

Unidad Didáctica: Derivadas y cálculo diferencial

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad de Matemáticas

Curso 2015/2016

Trabajo Fin de Máster, realizado bajo tutela de D. Luis Rico Romero, que presenta Carlos Pascual León en el Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo. Carlos Pascual León

Vº Bº del tutor

Fdo. Luis Rico Romero

ÍNDICE

0. INTRODUCCIÓN

La unidad didáctica que presento a continuación es el trabajo fin del Máster de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación profesional y Enseñanza de idiomas, en la especialidad de matemáticas. Con este documento pretendo materializar los progresos que he realizado durante el desarrollo de este máster en el curso académico 2015/2016. Para ello, he elaborado esta unidad didáctica, siguiendo las directrices y el modelo de análisis didáctico con las que hemos trabajado durante el desarrollo de las clases en la asignatura "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas" impartida por el profesor D. Luis Rico Romero.

El título de esta unidad didáctica es "Derivadas y cálculo diferencial", que queda ubicado en el bloque de análisis en la programación de I de Bachillerato, reflejada en el Real Decreto 1105/2014. El enfoque con el que se pretende abordar y estructurar este trabajo es el siguiente:

Un Primer bloque, en que reviso y hago un resumen del currículo oficial, que comprenderá el primer apartado de nuestro trabajo. Estará centrado en fundamentar teóricamente esta unidad, en la que trabajaré con aquellas leyes y decretos que regulan el sistema educativo a nivel nacional y a nivel autonómico.

Un segundo bloque que comprende distintos apartados:

- El análisis de contenido en el que abordo inicialmente el tema de estudio que he elegido desde una visión histórica, con la que pretendo justificar el origen de la derivación como herramienta de resolución de diversos problemas a lo largo de distintos períodos históricos. Además, analizo los contenidos presentes en el tema desde una perspectiva conceptual y procedimental.

- En el análisis cognitivo trato diversas cuestiones, entre las que se encuentran los objetivos y las expectativas de aprendizaje del alumnado junto con los principales errores y dificultades que pueden experimentar con el contenido presente en esa unidad. Además relaciono dichos objetivos de aprendizaje con sus correspondientes dificultades y errores asociados.

- En el análisis de instrucción, me centro en el diseño de diversas tareas para esta unidad, atendiendo a los objetivos que pretendo conseguir y los posibles errores que se puedan producir durante su desarrollo. A lo largo de este apartado expongo recursos y materiales didácticos que son de utilidad en las clases.

El tercer bloque de este trabajo está compuesto por una propuesta de unidad didáctica, en el que trato su desarrollo, el estudio de los objetivos que comprende, los contenidos específicos de esta unidad y la metodología que llevaré a cabo.

El cuarto bloque comprende:
- La evaluación del aprendizaje de la unidad didáctica, compuesta por la evaluación inicial, la evaluación formativa posterior y la calificación final.
- Un apartado dedicado a la atención a la diversidad, en el que propongo un programa personalizado de material y tareas de refuerzo para la asignatura, junto a una propuesta de actividades de ampliación.
- Un apartado de bibliografía, en que muestro los documentos que se han consultado en la realización de este trabajo.
- Anexos en los que recojo aquellos recursos que pueden complementar esta unidad didáctica.

1. NORMATIVA CURRICULAR

Actualmente, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre es la que regula las enseñanzas educativas a nivel nacional en el primer curso de Bachillerato en España. En ella, el currículo de enseñanza viene definido como “el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación”. Atendiendo a lo recogido en la LOMCE, realizo una primera reflexión, sobre aquellos elementos descritos que intervienen directamente en la normativa curricular:

- El conjunto de objetivos didácticos, en los que el profesor establece cuáles son las metas de conocimiento del alumnado a lo largo del curso académico, adaptando dichas metas al nivel de conocimiento esperado en función del curso escolar y los resultados deseables por parte del alumnado.

- Los contenidos son aquellos elementos de una disciplina sobre los que se desarrollan las capacidades expresadas en los objetivos didácticos, cuya meta es alcanzar tales capacidades. Los contenidos matemáticos vienen organizados en tres apartados, los conceptuales, procedimentales y actitudinales.

- La metodología estará constituida por el conjunto de criterios y decisiones tomadas por el profesor, que determinarán la manera de actuar en el aula: Los modelos de enseñanza que se siguen, recursos empleados, organización temporal y espacial, etc. que se llevan a cabo durante el desarrollo de las clases.

- La evaluación vendrá compuesta por aquellos instrumentos utilizados por el docente en la valoración de los resultados obtenidos por el alumnado, y que vendrán ligados a los objetivos propuestos junto a la superación de las competencias de aprendizaje establecidas.

Por otra parte, en el Real Decreto 1105/2014 publicado el 3 de Enero de 2015, se establecen las enseñanzas de las derivadas en el I curso de Bachillerato, incluido en el bloque de análisis. En este documento se recogen los contenidos mínimos que han de impartirse, encontrando además los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables a lo largo de esa etapa.

Acerca de los contenidos mínimos que han de desarrollarse en nuestra unidad didáctica, expone los siguientes:

- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.

- Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

- Representación gráfica de funciones.

En cuanto a los criterios de evaluación relacionados con nuestra unidad:

3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.

4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.

Siendo los estándares de aprendizaje evaluables asociados a éste:

3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.

3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

2. ANÁLISIS DE CONTENIDO

2.1. CONTEXTO HISTÓRICO

El concepto de derivada tal y como lo conocemos hoy día, es resultado de varios siglos de evolución y desarrollo. El papel que desempeña esta herramienta en la actualidad es de gran importancia, debido al amplio conjunto de aplicaciones en las que podemos utilizarla, entre las que encontramos el del cálculo de la velocidad y aceleración instantáneos de un objeto dentro del ámbito de la física, el cálculo de máximos y de mínimos de funciones en matemáticas o para la optimización del proceso de producción en el ámbito de la economía.

Desde un punto de vista matemático, podemos interpretar la derivada como una herramienta que mide la rapidez con la que varía el valor de una función respecto de su variable independiente, siendo su derivada puntual, la pendiente de dicha función en un punto. Esta herramienta la podremos utilizar para definir las tangentes a una curva.

> En la Antigua Grecia sabían cómo trazar tangentes para cierto tipo de curvas. Ellos habían definido una tangente como la línea que toca una curva en un solo punto pero sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otro tipo de curvas. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran dentro de un contexto geométrico. (Ponce, 2015, p. 10)

Con el paso de los años, se abordará la aplicación de derivadas en nuevos tipos de curvas, y surgirán nuevos tipos de problemas que estarán relacionados con el cálculo de áreas y longitudes de arco. Además se plantearán algunos problemas que estarán relacionados con el cálculo de máximos y mínimos de las funciones, que los griegos llamarán problemas isoperimétricos.

> En la edad media, muchos físicos que seguían la tradición aristotélica se habían enfocado en el estudio del “cambio”, un concepto central en la física de ese entonces. De hecho, se analizaron y clasificaron de manera lógica las diferentes formas en la que una variable podría cambiar de manera uniforme, no uniforme, o como una combinación uniforme y no uniforme. (Boyer, 1959, p. 73)

Todo este trabajo llevado a cabo en la edad Media, serviría de base a Galileo (1564-1642), para poder llevar a cabo un estudio en detalle de lo que hoy día se conoce en el ámbito de la física como “movimiento uniformemente acelerado” durante el año 1638. Este trabajo propiciaría que el estudio del movimiento de los cuerpos se hiciera de una manera más exacta y rigurosa.

Es por ello que, aunque actualmente se crea que el origen del cálculo de las derivadas está íntimamente ligado a la física, lo cierto es que su origen está más bien relacionado con la resolución de problemas geométricos. Sería a raíz de las investigaciones de Fermat (1601-1665), con las que el concepto de derivada iría madurando y relacionándose con otros conceptos como los extremos, límites e incluso continuidad de funciones. El método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos, viene recogido en su tratado “Método para hallar máximos y mínimos", que utilizaría para el cálculo de tangentes para ciertos tipos de funciones, como parte del estudio que realizó dentro de la geometría analítica.

> Para la década de 1660, las relaciones de cálculo algebraico y geométrico entre los problemas de extremos y los problemas de tangente se habían comprendido claramente. Es decir, para calcular un máximo se calculaba la pendiente de la tangente de acuerdo con una regla (una fórmula). Aún no existía el concepto de derivada, pero existía un método general para resolver este tipo de problemas. (Ponce, 2015, p. 10)

Con la posterior aparición del análisis infinitesimal, se establecerían de manera rigurosa los principios para el cálculo diferencial e integral, de manera simultánea por Isaac Newton (1643-1717) gracias a su trabajo en la teoría de fluxiones y Gottfried Leibniz (1646-1716) y su trabajo acerca del cálculo diferencial. Ambos utilizarían para sus trabajos los métodos que ya existían para el cálculo de tangentes y extremos para incorporarlos dentro de conceptos más generales, que actualmente se conoce como derivada e integral.

> Newton llamó fluxión a su "derivada", la cual consideraba como la razón de un flujo o cambio. Mientras que Leibniz consideró a la "derivada" como una razón de diferencias infinitesimales y le llamó cociente diferencial. (Ponce, 2015, p. 10)

Será en el año 1715, cuando Brook Taylor (1685-1731), escribe una ecuación expresando lo que nosotros actualmente consideramos como f(x+h) en términos de f(x) y de sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Considerando posteriormente diferencias más reducidas junto con un paso a límite, obtendría la fórmula que actualmente conocemos como series de Taylor.

Sería Leonhard Euler (1707-1783) quien mejoraría notablemente todo lo desarrollado hasta ese momento, sin embargo, todavía el proceso no estaba bien constituido para un cálculo sistemático de las derivadas, siendo incapaz de explicar de manera rigurosa la naturaleza de este concepto. Años más tarde, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático preocupado en identificar los problemas lógicos dentro de la rama de las matemáticas, diría que los avances realizados por Newton eran insuficientes para llevar a cabo una generalización del proceso de cálculo de las derivadas. Lagrange ya introducirá el concepto de "función derivada", tal y como la conocemos hoy día.

Bolzano (1781-1848) sería quien establecería la derivada de una función como el cociente de la diferencia entre un primer valor que se acerca indefinidamente a un valor de la función escogido entre el incremento realizado. Cauchy (1789-1857) define en el año 1823 la derivada de una función, como el límite del cociente de diferencias (f (x + h) − f (x)) / h, cuando el valor de h tiende a 0. Con nuestra notación actual, quedaría:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Después del trabajo de Cauchy el cálculo se vería de manera diferente pues comenzó a establecerse una base más sólida y rigurosa, con definiciones más precisas y con teoremas cuyas demostraciones estaban basadas en esas definiciones. Además de dar pauta para una mejor fundamentación del cálculo, el trabajo de Cauchy permitiría la creación de nuevos resultados que, previamente, eran imposibles de formular.

> Weierstrass (1815-1897) fue el principal impulsor de la propuesta de Cauchy, y con pequeños cambios que introdujo, hoy día se habla del modelo de Cauchy- Weierstrass. (Ponce, 2015, p. 10)

2.2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

1. Campo conceptual

1.1. Hechos

1.1.1. Términos

Polinomio, Potencias (base, exponente), logaritmos (Logaritmos decimales, Logaritmos neperianos), razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente) e inversas.

Ejes de coordenadas, punto, intervalos (abierto, semiabierto, cerrado).

Función, variable independiente, variable dependiente, dominio, recorrido. Funciones reales de variable real. Composición de funciones. Función inversa.

Funciones polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmica, trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante, cotangente).

Límite de una función en un punto.

<u>Variación de una función en el entorno de un punto. Cociente incremental</u>

<u>Pendiente de una recta que pasa por dos puntos de una curva. Recta tangente a una curva en un punto</u>

<u>Derivada. Diferencial de una función.</u>

1.1.2. Notaciones

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, a^x , $\log_a(x)$, log (x), ln (x), sen(x), cos(x), tg(x), cotg(x), sec(x), cosec(x), arc sen(x), arc cos(x), arc tg(x), arc cotg(x), arc sec(x), arc cosec(x).

Eje X, eje Y, P(x, y), (a, b), (a, b], [a, b), [a, b]

f(x) = y, x, y, D = {x ∈ / ∃ f (x)}, R = {f (x) / x ∈ D}, g [f(x)], f^{-1}

$\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, f´(x) =$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

La derivada de una función se lee: derivada de “efe” de “equis”.

La derivada de una función f(x) se escribe: f´(x).

1.1.3. Convenios

[f (x)]´= f´(x)

La derivada de una función racional en sus polos de orden par se dice, por convenio, que es infinito (+ o – infintito); en estos puntos la función presenta una asíntota vertical (la pendiente de la recta tangente es infinito).

La derivada de una función racional en sus polos de orden impar no existe, ya que los límites de su cociente incremental a izquierda y a derecha del punto varían de signo y son distintos.

La n-ésima derivada de una función f(x), se escribe $f^{\,n)}(x)$.

1.1.4. Resultados

Derivada de una función por una constante: [a.f(x)]´ = a.f´(x)

Derivada de la suma: [f(x) + g(x)]´ = f´(x) + g´(x)

Derivada del producto: [f(x).g(x)]´ = f´(x).g(x) + f(x).g´(x)

Derivada del cociente: $[\frac{f(x)}{g(x)}]´ = \frac{f(x)´g(x)-f(x)g(x)}{g(x)^2}$

Regla de la cadena: [g(f(x))]´ = g´(f(x)).f´(x)

Derivada de la potencia: $[x^m]´= mx^{m-1}$ $[f(x)^m]´ = m.f(x)^{m-1}.f´(x)$

Derivada de la raíz cuadrada: $[\sqrt{x}]´=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $[\sqrt{f(x)}]´=\frac{f´(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Derivada de la función exponencial: $[a^x]´= a^x.\ln(a)$ $[a^{f(x)}]´ = f´(x).a^{f(x)}.\ln(a)$

Derivada de la función exponencial de base e: $[e^x]´= e^x$ $[e^{f(x)}]´ = f´(x).e^{f(x)}$

Derivada del logaritmo neperiano: $[\ln(x)]´=\frac{1}{x}$ $[\ln(f(x))]´=\frac{f´(x)}{f(x)}$

Derivada del seno: [sen(x)]´= cos(x) [sen(f(x))]´= cos(f(x)).f´(x)

Derivada del coseno: [cos(x)]´= -sen(x) [cos(f(x))]´ = -sen(f(x)).f´(x)

Derivada de la tangente: $[tg(x)]´ = 1 + tg^2(x)$ $[tg(f(x))]´= f´(x).(1+tg^2(f(x)))$

Derivada de la cotangente: $[cotg(x)]´ = 1 + cotg^2(x)$ $[cotg(f(x))]´= f´(x).(1+cotg^2(f(x)))$

Derivada de la secante: [sec(x)]´= sec(x).tg(x) [sec(f(x))]´= sec(f(x)).tg(f(x)).f´(x)

Derivada de la cosecante:
[cosec(x)]´ = cosec(x).cotg(x) [cosec(f(x))]´ = -cosec(f(x)).cotg(f(x)).f´(x)

Derivada del arcoseno: [arc sen(x)]´= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [arc sen(f(x))]´= $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$

Derivada del arcocoseno: [arc cos(x)]´= - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [arc cos(f(x))]´= - $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$

Derivada del arcotangente: [arc tg(x)]´= $\frac{1}{1+x^2}$ [arc tg(f(x))]´= $\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Derivada del arcosecante: [arc sec(x)]´ = $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ [arc sec(f(x))]´ = $\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}}$

Derivada de la función potencial: $[f(x)^{g(x)}]'$ = g(x).f(x)$^{g(x)-1}$.f´(x) + $f(x)^{g(x)}$.g´(x).ln(f(x))

La derivación y la integración son operaciones inversas.

Si la función es creciente en el punto, la derivada en el punto es mayor que 0.

La derivada de una constante es la función nula.

1.2. Conceptos

Función derivada. Derivada en un punto. Propiedades de las funciones derivables en un punto.

Cálculo de derivadas inmediatas (constante, de una potencia, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y sus inversas). Técnicas elementales para el cálculo de derivadas.

1.3. Estructuras

Espacio de las funciones continuas reales $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

Espacio de las funciones continuas en un intervalo $\mathbb{C}([a, b]$

2. Campo procedimental

2.1. Destrezas

Calcular la derivada de una función en un punto mediante su definición de derivada.

Aplicar las reglas de la derivación para funciones algebraicas y trascendentes.

Calcular las derivadas sucesivas de una función dada.

Determinar puntos singulares (máximos, mínimos, puntos de inflexión) e intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad para una función dada.

Usar el cálculo de derivadas en problemas de optimización.

2.2. Razonamientos

Deductivo: Propiedades analíticas y algebraicas de las funciones derivables.

Inductivo: reglas de iteración para calcular la derivada n-ésima de una función

Figurativo: Interpretación de propiedades de la derivada de una función en el entorno de un punto a partir de su representación gráfica derivada.

3. Estrategias

Aplicación de las reglas de derivación para calcular una función derivada.

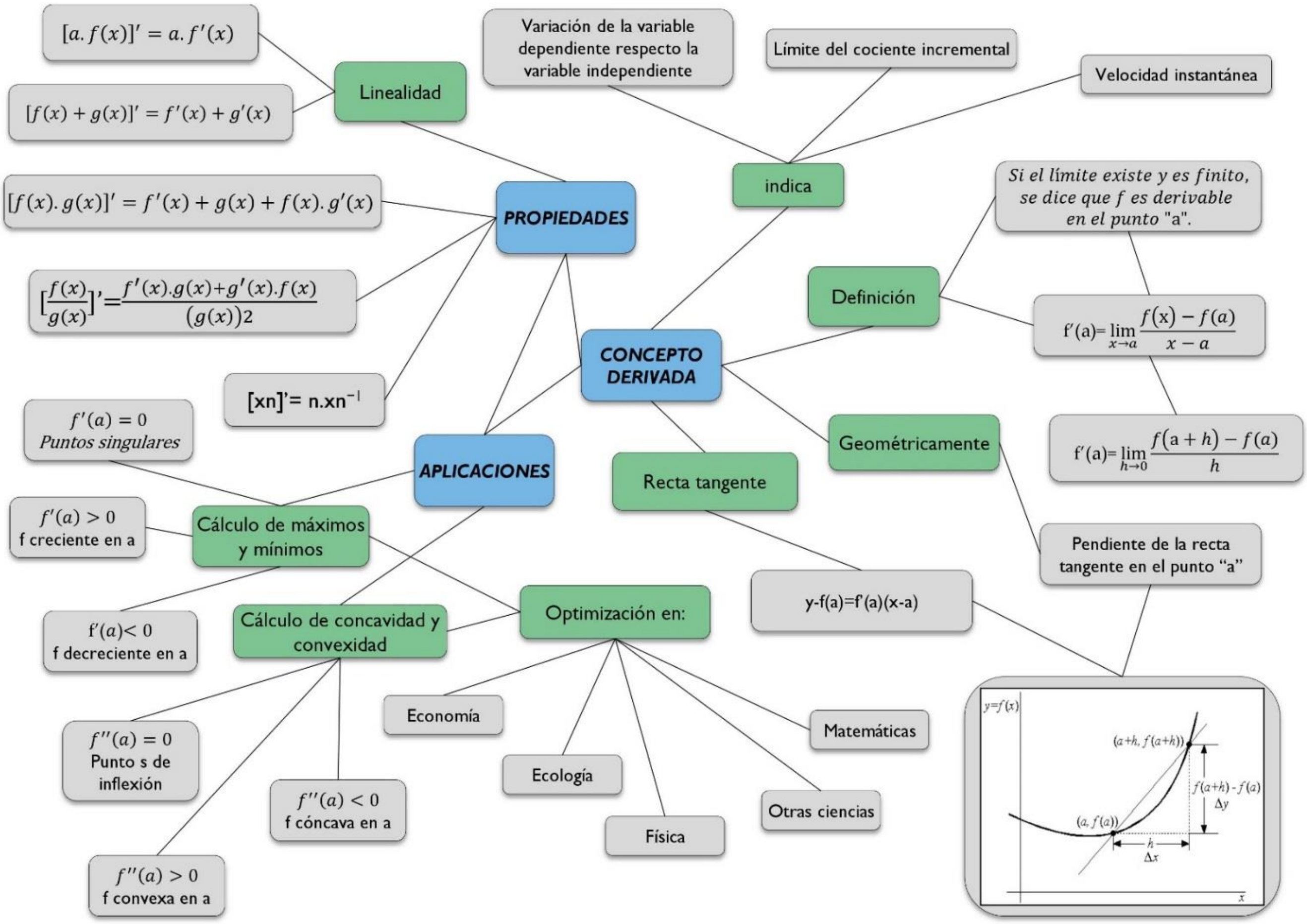
Ejemplificar el significado de la función derivada de una función dada.

Aplicar la continuidad y derivabilidad de una función en un punto o en un intervalo para estudiar fenómenos de cambio.

Uso de teoremas para la resolución de problemas de derivación.

Utilización de medios tecnológicos para representar y resolver problemas de derivación.

2.3. MAPA CONCEPTUAL



2.4. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En este apartado presento distintas formas, notaciones y expresiones que encontramos en los elementos de nuestro tema, así como las relaciones existentes entre ellas.

Cuando representamos conceptos y propiedades, estamos haciendo presente esa idea desde un enfoque determinado, luego es importante distinguir entre nuestro objeto de estudio y el sistema de representación utilizado para acercarnos a dicho concepto.

A continuación analizo los siguientes sistemas de representación: Simbólico, verbal, gráfico y tecnológico, en esta unidad didáctica

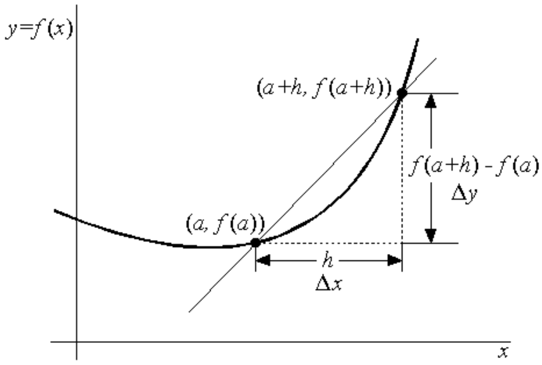
Representación simbólica
Utilizaremos este sistema de representación cuando expresamos los conceptos deseados utilizando el lenguaje analítico, siguiendo las reglas algebraicas usuales.
Ejemplos:

f´(x): Derivada general (función derivada), donde x está definida en un subintervalo de f.
f´(x_0): Derivada puntual, donde x_0 es un punto y su derivada puntual es la pendiente de su recta tangente.

Representación verbal
En este apartado nos centraremos en la lectura y escritura de los conceptos presentes en la unidad, es decir, como verbalizamos las expresiones algebraicas presentes.

f´(x): Derivada de f de x.
f´(x_0): Derivada de f en el punto x_0.
f´(x): Derivada segunda de f de x.
f´´ (x_0): Derivada segunda de f en el punto x_0.
f $^{n)}$(x): Derivada de orden n (n-ésima) de f de x.
f $^{n)}$ (x_0): Derivada de orden n (n-ésima) de f en el punto x_0.

Representación gráfica
Este sistema de representación se puede utilizar en la explicación del concepto de derivada, para que el alumno pueda interpretarlo de manera intuitiva y conocer cómo se construye históricamente este concepto.



Representación manipulativa

Un recurso que es muy utilizado a día de hoy, como complemento a la formación del estudiante son aquellos recursos tecnológicos que no solo permiten representar gráficamente nuestro objeto de estudio, sino que permite manipular los distintos parámetros para comprender el funcionamiento.

Para ello, podremos utilizar programas informáticos como el Mathematica, Geogebra o el Octave. Ejemplos de Applet que podemos utilizar para la compresión del concepto de derivada:

http://tube.geogebra.org/student/m95509

Con este applet profundizaremos en el concepto de derivada puntual, derivadas laterales y recta tangente a una función en un punto determinado.

Para ello, introduciremos la función que queremos analizar, y el punto en el que queremos calcular la recta tangente.

http://www.geogebra.org/m/1093409

En este applet se trabajará con las rectas pendientes de las funciones introducidas. Para trabajar con este applet, podemos variar los valores que hemos dado a la función y ver como varía la recta pendiente.

2.5. SENTIDOS Y MODOS DE USO

Entendemos sentidos y modos de uso como aquellas situaciones o problemas que aplican y justifican de modo práctico el concepto matemático que se estudia. La aplicación de esta herramienta matemática se hace a través de distintos fenómenos, que servirán como vínculo entre el mundo real y los conceptos implicados en nuestro estudio.

Además, se pondrán en juego en este apartado los cuatro contextos que se han quedado establecido en el estudio PISA, que incluyen contexto personal, laboral/educativo, público y científico. Y usando este contexto, podremos trabajar en los distintos fenómenos relacionados con la derivación y diferenciabilidad.

Situación personal

En el ámbito de administración, para el cálculo de las razones de cambio cuando se tiene la función que indica crecimiento o decrecimiento en el ámbito económico. En el ámbito doméstico, para minimizar costos o maximizar los beneficios.

Situación educativo/laboral

En la empresa, cálculo de la optimización del trabajo, en función de diversos aspectos, tales como condiciones temporales y espaciales, crecimiento de las poblaciones o los circuitos eléctricos, que sirven de base para la mayoría de ingenierías.

En Bachillerato, para la optimización de funciones y cálculo de convexidad.

En ingeniería industrial, para calibrar los cambios de la producción.

Situación pública

En construcción, en el uso para situaciones relacionadas con la resistencia de materiales.

En mecánica de fluidos, para la construcción de presas.

En el campo de electromagnetismo, en el diseño de electrodomésticos como las televisiones o el microondas.

En economía de empresa, para el cálculo de la rentabilidad que genera una inversión en un producto, cálculo del producto marginal, las funciones económicas y procesos de optimización.

En estadística, para ver el cambio de cada año con respecto al anterior, en las tasas de mortalidad y natalidad, crecimiento poblacional, etc.

Situación científica

En el campo de la física, para el cálculo de aceleración y velocidad instantáneas de un móvil en diversos contextos.

En matemáticas, para el cálculo del máximo y mínimo de una función, y la concavidad o convexidad de una función.

En ecología, se utiliza para el cálculo del crecimiento de poblaciones en diversos contextos ambientales.

3. ANÁLISIS COGNITIVO

3.1. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Objetivos de aprendizaje: Bloque de análisis.

En el Real Decreto 1105/2014 quedan establecidos los objetivos de aprendizaje, mediante los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables para la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato de Ciencias:

<u>Contenidos</u>

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.

Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.

Representación gráfica de funciones.

<u>Criterios de evaluación:</u>

3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.

4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.

<u>Estándares de aprendizaje</u>

3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.

3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

Objetivos de aprendizaje: Específicos de la unidad didáctica.

Siguiendo el mapa conceptual mostrado en apartados anteriores, me centro en detallar los objetivos de nuestra unidad didáctica en torno a estos tres focos conceptuales: concepto de derivada, propiedades de la derivada y aplicaciones de la derivada.

<u>Objetivos relativos al concepto de derivada.</u>

Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.

Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.

Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.

Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.

Utilizar programas de software para calcular gráficamente la derivada de una función en un punto.

<u>Objetivos relativos a las propiedades de la derivada.</u>

Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas de una determinada función.

Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.

Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información proporcionada por su función derivada.

<u>Objetivos relativos a las aplicaciones de derivada.</u>

Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.

Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.

Resolver problemas de optimización mediante el cálculo de puntos críticos de la función en su dominio o en un intervalo determinado.

Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas.

A continuación, se presentan en una tabla los objetivos agrupados por los focos propuestos y su relación con las competencias PISA.

Objetivos de aprendizaje		Competencias						
		RA	C	M	RP	R	LS	HM
Concepto de derivada	Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.	X	X			X	X	
	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.	X	X	X				
	Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.			X		X	X	
	Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.	X	X	X				
	Utilizar programas de software para calcular gráficamente la derivada de una función en un punto.		X			X		X
Propiedades de la derivada	Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas de una determinada función.		X		X			
	Identificar las propiedades analíticas de la derivada y ejemplificar propiedades que cumple y no cumple la derivada de una función.	X		X			X	
	Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.		X				X	X
	Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información proporcionada por su función derivada.			X			X	
Aplicaciones de la derivada	Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.	X		X	X			X
	Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.			X	X	X		
	Resolver problemas de optimización mediante el cálculo de puntos críticos de la función en su dominio o en un intervalo determinado.	X			X			X
	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas.				X	X		X

COMPETENCIAS: RA: Razonar y Argumentar C: Comunicar. M: Matematizar. RP: Elaborar estrategias para resolver problemas. R: Representar. LS: Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico. HM: Utilizar herramientas matemáticas

3.2. EJEMPLOS DE TAREAS ASOCIADAS A OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En este apartado he diseñado una tarea asociada a un objetivo de aprendizaje para cada uno de los focos conceptuales propuestos en la unidad didáctica.

1 (resuelto)

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.

Competencias
Matematizar (M), representar (R) y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico (LS).

Enunciado del ejercicio
Dada la función $y=x^2+3x-4$*, halla el punto donde la recta tangente a la curva es perpendicular al eje de ordenadas.*

Resolución
En primer lugar, vamos a calcular la derivada de la función en un punto x:

$$\text{f(x)}= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^2+3(x+h)-4\right)-(x^2+3x-4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^2+h^2+2xh+3x+3h-4\right)-(x^2+3x-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^2+h^2+2xh+3x+3h-4\right)-(x^2+3x-4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh+3h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2x+3 = 2x+3$$

Como la recta tangente ha de ser perpendicular al eje de ordenadas (paralela al eje de abscisas), la recta tangente que buscamos tendrá pendiente 0.
Al igualar la derivada a 0, obtenemos: $2x+3=0$, y por lo tanto, $x=-3/2$.

Una vez obtenida la abscisa del punto de tangencia, obtenemos la ordenada sustituyendo el valor obtenido en la función: $f(-3/2)=(-3/2)^2+3(-3/2)+4=9/4-9/2+4=7/4$.

Conclusión
El punto de tangencia tiene por coordenadas: (-3/2,7/4)

2

Foco conceptual
Aplicaciones de la derivada

Objetivo
Resolver problemas de optimización mediante el cálculo de puntos críticos de la función en su dominio o en un intervalo determinado.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), elaborar estrategias para resolver problemas (RP) y utilizar herramientas matemáticas (HM).

Enunciado del ejercicio
Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^3-2x^2+1$*, en el intervalo [-5,10].*

3

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.

Competencias
Razonar y argumentar (RA) y comunicar (C) y matematizar (M).

Enunciado del ejercicio
¿Cómo interpretas que la recta tangente a la curva de una función es positiva? Encuentra un punto en la que la tangente a la curva x^2-1 *sea 4, e interpreta lo que le ocurre a dicha función en el entorno del punto.*

3.3. ERRORES Y DIFICULTADES

En este apartado expongo errores y dificultades previsibles que puede encontrar el alumno durante el desarrollo de la unidad didáctica en cada uno de los focos conceptuales.

Dificultades relacionadas con el concepto de derivada

Uso incorrecto de conceptos y procedimientos adquiridos previamente (representación gráfica de funciones, desarrollos algebraicos,….).

No dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios del concepto de derivada.

Extender el cálculo de derivadas a dominios donde la función no es derivable.

Problemas en identificar la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto.

Identificar erróneamente la derivada de una función en un punto con su función derivada.

Dificultades relacionadas con las propiedades de la derivada

Aplicar incorrectamente las propiedades analíticas de la derivada en la resolución de problemas.

Considerar erróneamente la derivación de números como variables.

Confundir cuando aplicar la regla del producto y la regla de la cadena.

Identificar erróneamente f(x) y g(x) al aplicar la regla de la cadena.

Dificultades relacionadas con las aplicaciones de la derivada

Confundir máximos y mínimos absolutos y relativos en los problemas de optimización.

Confundir concavidad y convexidad al calcular las segundas derivadas en problemas de optimización.

Comprender incorrectamente los enunciados de problemas propuestos.

	Errores y dificultades	Errores asociados
Concepto de derivada	Uso incorrecto de conceptos y procedimientos adquiridos previamente (representación gráfica de funciones, desarrollos algebraicos,….).	E11
	No dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios del concepto de derivada.	E12
	Extender el cálculo de derivadas a dominios donde la función no es derivable.	E13
	Problemas en identificar la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto.	E14
	Identificar erróneamente la derivada de una función en un punto con su función derivada.	E15
Propiedades de la derivada	Aplicar incorrectamente las propiedades analíticas de la derivada en la resolución de problemas.	E21
	Considerar erróneamente la derivación de números como variables.	E22
	Confundir cuando aplicar la regla del producto y la regla de la cadena.	E23
	Identificar erróneamente f(x) y g(x) al aplicar la regla de la cadena.	E24
Aplicaciones de la derivada	Confundir máximos y mínimos absolutos y relativos en los problemas de optimización.	E31
	Confundir concavidad y convexidad al calcular las segundas derivadas en problemas de optimización.	E32
	Comprender incorrectamente los enunciados de problemas propuestos.	E33

Objetivos de aprendizaje		Errores vinculados
Concepto de derivada	Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.	E11, E12, E15
	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.	E11, E13, E14, E15
	Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.	E12, E13, E14
	Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.	E12, E14
	Utilizar programas de software para calcular gráficamente la derivada de una función en un punto.	E12, E14, E15
Propiedades de la derivada	Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas de una determinada función.	E21, E22, E23, E24
	Identificar las propiedades analíticas de la derivada y ejemplificar propiedades que cumple y no cumple la derivada de una función.	E21, E22, E23, E24
	Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.	E12, E14, E21
	Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información proporcionada por su función derivada.	E11, E12, E21
Aplicaciones de la derivada	Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.	E12, E31, E32, E33
	Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.	E11, E21, E31, E33
	Resolver problemas de optimización mediante el cálculo de puntos críticos de la función en su dominio o en un intervalo determinado.	E31, E32, E33
	Aplicar el teorema de Rolle y el teorema del valor medio en la resolución de problemas de cálculo de derivadas.	E31, E33
	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas.	E31, E33, E34

3.4. EJEMPLOS DE TAREAS ASOCIADAS A ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE.

En este apartado vamos a analizar los errores de aprendizaje asociados a nuestros objetivos, con la propuesta de tres tareas correspondientes a cada una de los focos conceptuales.

1

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), comunicar (C) y matematizar (M).

Enunciado del ejercicio
Dada la función f: R→R, definida por f(x)=

$$f(x)=\begin{cases} (x-2)+\cos(x-2) & \text{si } x\leq 2 \\ \dfrac{sen(x-2)}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Determinar los puntos en los que f es continua y derivable.

Errores y dificultades asociados

E12 - *No dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios de derivada.*
E14 - *Problemas en identificar la derivada puntual como la tangente de la función en un punto.*

2

Foco conceptual
Propiedades de la derivada

Objetivo
Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), matematizar (M) y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico (LS).

Enunciado del ejercicio
Calcular las derivadas de:

$f(x) = (x^2-3x).\ln x$ $\quad$ $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{5x+2}$ $\quad$ $f(x) = 2x.\operatorname{sen} x$ $\quad$ $f(x) = \frac{e^x+3x}{x-\ln x}$

Errores y dificultades asociados

E12 - *No dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios de derivada.*
E31 - *Confundir máximos y mínimos absolutos y relativos en los problemas de optimización.*
E32 - *Confundir concavidad y convexidad al calcular las segundas derivadas en problemas de optimización.*
E33 - *Comprender incorrectamente los enunciados de problemas propuestos.*

3

Foco conceptual
Aplicaciones de la derivada

Objetivo
Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), matematizar (M), elaborar estrategias para la resolución de problemas (RP) y utilizar herramientas matemáticas (HM).

Enunciado del ejercicio
Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

Errores y dificultades asociados

E12 - *No dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios de derivada.*
E31 - *Confundir máximos y mínimos absolutos y relativos en los problemas de optimización.*
E32 - *Confundir concavidad y convexidad al calcular las segundas derivadas en problemas de optimización.*
E33 - *Comprender incorrectamente los enunciados de problemas propuestos.*

4. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

4.1. METODOLOGÍA

En esta unidad didáctica pretendo construir el concepto de derivada de una función en un punto paso a paso. Para ello presento a los alumnos la construcción de la derivada de una función en un punto usando recursos que se encuentran entre los conocimientos previos que el alumno ha adquirido en unidades anteriores. Con esto quiero asegurar que el aprendizaje sea accesible e intuitivo para el alumno, interiorizando progresivamente todos los conocimientos necesarios durante el desarrollo de la unidad.

La metodología que utilizaré a lo largo de la unidad didáctica será activa por parte del alumnado, que será pieza clave durante el desarrollo de las clases. Por tanto, mi papel como profesor será ejercer de guía en una investigación que realizaremos conjuntamente.
Los conceptos teóricos presentados estarán acompañados de ejemplos, que ayudarán a comprender desde un enfoque práctico, la aplicación de los conceptos expuestos en clase. Con el objetivo de facilitar la participación de los alumnos, pediré continua colaboración por parte de todos ellos en el desarrollo de los ejemplos y ejercicios que elabore en la pizarra.

Además tendré en cuenta la atención a la diversidad, por lo que se enviarán ejercicios de refuerzo y de ampliación a los alumnos que se considere necesario junto con actividades que tengan conexión con la vida cotidiana y que estén también relacionadas con otras materias que estén cursando los alumnos.

4.2. CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS TAREAS

El marco teórico del estudio PISA define la modalidad del contenido "Cambios y relaciones" de la siguiente manera:

"Comprensión de los tipos fundamentales de cambio y el reconocimiento de cuándo ocurren para así utilizar modelos matemáticos adecuados y describir y predecir el cambio. Matemáticamente, esto significa modelar el cambio y las relaciones con funciones apropiadas, y también crear, interpretar y traducir entre representaciones simbólicas y representaciones gráficas de las relaciones. Aspectos del contenido matemático tradicional de las funciones y del álgebra, incluyendo expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades, representaciones tabulares y gráficas, son básicos para describir, modelar e interpretar los fenómenos de cambio."

Es por eso que todas las tareas que los alumnos trabajen en esta unidad didáctica, las consideramos que forman parte de una ampliación de dicha categoría de Cambios y relaciones, aunque el marco PISA no incluya el tratamiento formal de la derivación dentro de sus focos de estudio. El motivo por el cual las tareas pertenecen a esa categoría de ampliación, es debido a que no se atienen a los criterios establecidos por PISA, ya que trabajan sobre las nociones de límites e infinito, no incluidas en dicho estudio.

4.3. NIVELES DE COMPLEJIDAD PARA LAS TAREAS PROPUESTAS

Atendiendo a las distintas competencias que quedan establecidas y evaluadas en programa internacional de evaluación de estudiantes PISA, realizo una clasificación de las tareas propuestas, atendiendo a los distintos niveles de profundidad de las mismas. En este trabajo utilizo la caracterización llevada a cabo por Rico y Lupiáñez (2008) que establece tres niveles:

Reproducción
Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido. Son problemas que les resultan familiares y se resuelven aplicando algoritmos o destrezas técnicas. Incluye los procesos de acceder (recordar, reproducir) e identificar.

Conexión
Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos y que puede integrar información para resolver problemas que no son rutinarios pero que exigen que el estudiante se decida por una de entre varias estrategias de resolución. Incluye los procesos de aplicar, analizar y valorar.

Reflexión
Las preguntas en este nivel son situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema. Se exige que el estudiante analice, interprete y desarrolle sus propios modelos y estrategias y presente argumentos matemáticos, demostraciones y generalizaciones. Incluye los procesos de sintetizar, crear y juzgar. "

Presento a continuación un ejemplo de tarea para cada uno de los niveles de complejidad propuestos:

Tarea de reproducción

Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x)=x^4-3x^2+7$
b) $f(x)=ln(x+1).e^x$
c) $f(x)=sen^2(x+1)$

Foco conceptual
Propiedades de la derivada

Objetivo
Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.

Competencias
Matematizar (M), elaborar estrategias para resolver problemas (RP) y representar (R).

Tarea de conexión

Dada la función f: R→R, definida por $f(x)= \begin{cases} (x-2) + \cos(x-2) & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\boldsymbol{sen(x-2)}}{\boldsymbol{x-2}} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Determinar los puntos en los que f es continua y derivable.

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Aplicar las condiciones bajo las cuales una función es derivable para determinar si una función es o no derivable en un punto.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), comunicar (C), matematizar (M) y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico (LS).

Tarea de reflexión

Estudia, según los valores del parámetro a, la continuidad y derivabilidad de la función f: R→R definida por

$$f(x)= \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Aplicar las condiciones bajo las cuales una función es derivable para determinar si una función es o no derivable en un punto.

Competencias
Razonar y argumentar (RA), comunicar (C), matematizar (M) y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico (LS).

4.4. RECURSOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

Dentro de este apartado quedan incluidos los recursos convencionales, como los libros de texto, cuadernos, pizarra o el proyector. En esta ocasión, me voy a centrar en aquellos recursos que hasta ahora su uso ha sido escaso por parte del profesorado. Con esto, me refiero al uso de software informático con lenguaje accesible tanto para los profesores como para los alumnos.

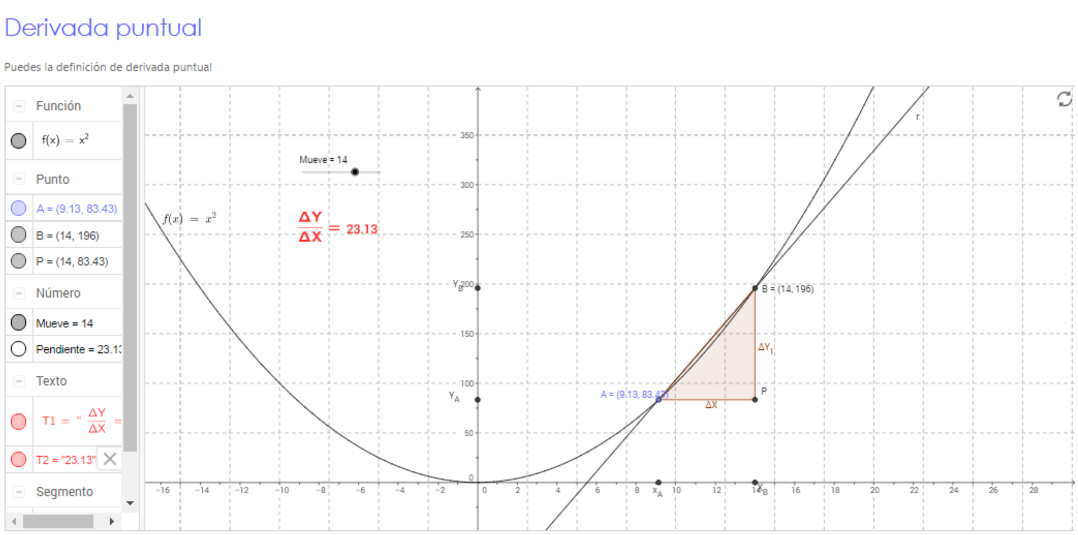
Este uso de las nuevas tecnologías influye positivamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y su importancia queda reflejada en el Real decreto de enseñanzas mínimas de la siguiente manera:
"En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad."

Siguiendo esta línea presento recursos informáticos más interesantes para el desarrollo de esta unidad didáctica:

Geogebra
Se trata de un software matemático libre, cuyo uso está especialmente indicado para alumnos de educación secundaria y universitaria. Este programa reúne aplicaciones para el uso en los campos de geometría, álgebra y cálculo.
Una de sus características más interesantes, es que es posible encontrar en su página web oficial, geogebra.org, una amplia cantidad de archivos descargables (applets) con conceptos trabajados en esta unidad didáctica.

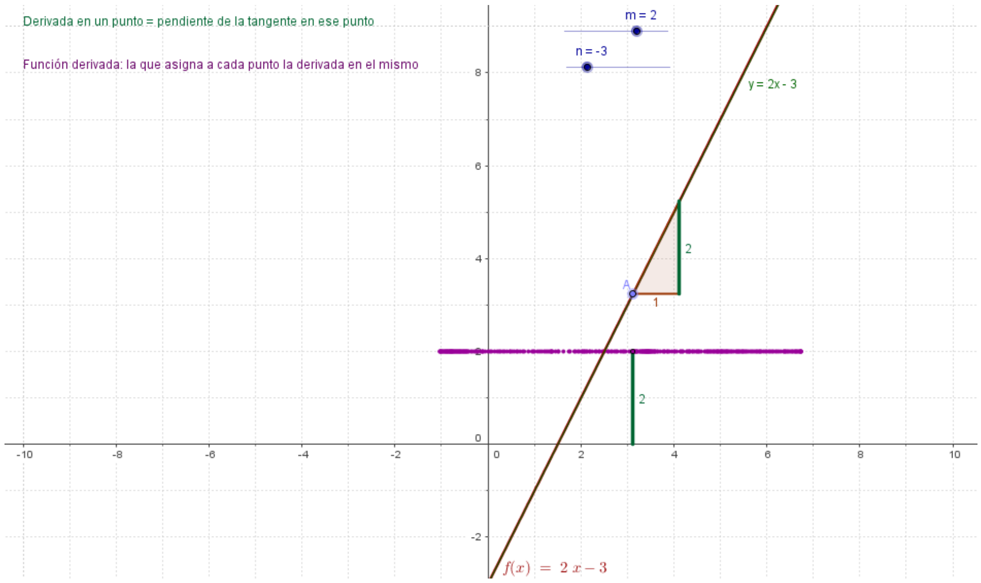
Applet derivada puntual y cociente incremental
http://www.geogebra.org/material/simple/id/112020

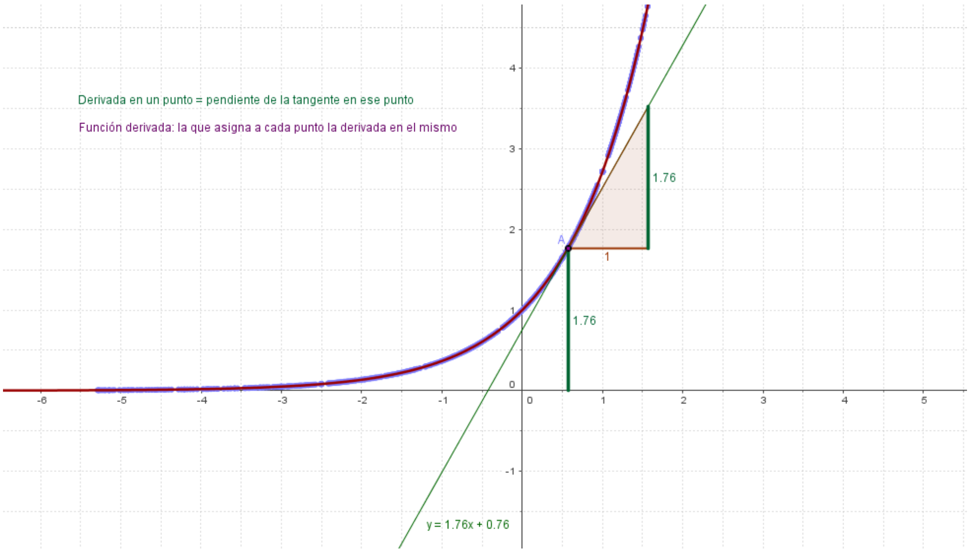
En esta applet se trabaja con el concepto primigenio derivada puntual, pudiendo manipular los cocientes incrementales obteniéndose así, las distintas aproximaciones de la derivada.



Applet función derivada
http://www.geogebra.org/material/simple/id/1352415

En este applet vemos como se construye las funciones derivadas gráficamente.
Paso a paso veremos cómo se construyen punto a punto la derivada para funciones de primer, segundo, tercer grado, hasta terminar con ecuaciones exponenciales y trigonométricas.





5. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

5.1. SECUENCIACIÓN

Esta unidad didáctica está diseñada para el curso de 1º de Bachillerato de Ciencias, y está distribuida en 11 sesiones de trabajo de 1 hora de duración, en los que se desarrollarán sus contenidos propios:

Foco 1: Concepto de derivada

Sesión 1

Propiedades locales y propiedades de una función en un intervalo. Monotonía.

Interpretación geométrica del crecimiento de una función en un intervalo y en un punto. Variación instantánea en un punto. Derivada de una función en un punto. Derivadas laterales.

Relaciones entre continuidad y derivabilidad.

Sesión 2

Interpretación geométrica de la variación instantánea. Rectas tangente y normal a una curva.

La función derivada.

Sesión 3

Derivadas de funciones elementales.

Reglas de derivación: Función constante, potencia, exponencial, logarítmicas, trigonométricas y arco.

Álgebra de derivadas: Número por una función, suma, producto y cociente de funciones.

Sesión 4

Álgebra de derivadas: Producto y cociente de funciones (repaso).

Álgebra de derivadas: Regla de la cadena.

Sesión 5

Álgebra de derivadas: Regla de la cadena (repaso)

Prueba escrita: Reglas de derivación

Foco 2: Propiedades de la derivada

Sesión 6

Funciones monótonas. Funciones con derivada no nula.

Funciones con derivada nula en un punto.

Sesión 7

Puntos críticos de una función.

Curvatura de una función.

Foco 3: Aplicaciones de la derivada.

Sesión 8

Optimización de funciones

Construcción aproximada de curvas.

Sesión 9

Ejercicios de repaso

Sesión 10

Sesión de evaluación

A continuación introduzco el esquema de trabajo que seguiré en el apartado 5.2. "Desarrollo de la secuencia de tareas", en el que se trabaja con detalle cada una de las sesiones de la unidad.

Cada sesión se inicia con un primer apartado en que establezco en primer lugar el tiempo que dedicaremos a las explicaciones y a las tareas que intervienen en ella. A continuación, los contenidos que se impartirán en la clase, seguido de los objetivos que se pretenden conseguir. Por último, expongo los posibles recursos de software que se podrán utilizar en la clase, para complementar los contenidos expuestos en el desarrollo de cada sesión.

Tras ello, se realizará un análisis detallado de todas las tareas que intervienen en la sesión incluidas aquellas destinadas para su realización en casa.

En la primera sesión quedará reflejada toda la información relativa a cada una de las tareas, y en las sesiones posteriores se señalará solo la información más destacable de la secuencia de tareas.

5.2. DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE TAREAS
Concepto de derivada

Sesión 1: Derivada de una función en un punto

Evaluación inicial y repaso de conocimientos previos	*5´- 10´*
Derivada de una función en un punto	*20´- 25´*
Resolución tareas 1	*5´- 10´*
Derivadas laterales. Continuidad y derivabilidad	*10´ - 25´*
Resolución tarea 2	*10´- 15´*
Resolución tarea 3	*5´ - 10´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Evaluación inicial y repaso de conocimientos previos: Propiedades locales y propiedades de una función en un intervalo. Monotonía.

2. Interpretación geométrica del crecimiento/ decrecimiento de una función en un intervalo y en el entorno de un punto. Variación instantánea en un punto. Derivada de una función en un punto. Derivadas laterales.

3. Relaciones entre continuidad y derivabilidad.

Objetivos:

Usar los conceptos de límite y continuidad para el estudio de la continuidad de una función en un punto.

Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.

Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.

Recursos:

Se proporcionará a los alumnos un link de descarga de una applet de Geogebra, para la representación de funciones y de su correspondiente función derivada. Trabajaremos la forma de usarla durante el desarrollo de las tareas de clase.

Links de descarga:

http://www.geogebra.org/m/RWcac3ya?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fgr%25C3%25A1fica%2Bde%2Bfunciones%2Fmaterials%2F

Ejercicios de clase

Tarea 1

Mediante su definición, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

- f(x) = $x^2 + 3x$, en los puntos de abscisa x = 1 y x = -3.
- f(x) = $\sqrt{2x}$, en los puntos de abscisa x = 2 y x = 9.

Duración: 5 – 10 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función derivada.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar la "derivada de una función en un punto".

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización del segundo apartado, donde ejerce de guía para el alumnado.

<table>
<tr><td rowspan="5">Elementos de la tarea</td><td>Meta</td><td>Calcular la derivada de una función en un punto</td></tr>
<tr><td>Operaciones</td><td>Función derivada</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td>Ampliación de cambios y relaciones</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Complejidad</td><td>Reproducción</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Condiciones</td><td>Presentación</td><td>Redactado por escrito en papel</td></tr>
<tr><td>Comunicación
¿Cómo?
¿Cuándo?</td><td>Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase.
En la sesión 1.</td></tr>
<tr><td>Agrupamiento de alumnos</td><td>Tarea a realizar de manera colectiva junto al profesor</td></tr>
<tr><td>Duración</td><td>10´ - 15´</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td colspan="2">Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</td></tr>
</table>

Tarea 2

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$, en x = 2.

$f(x) = |x^2 - 4|$ en x = 2 y x = -3.

$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ \ln x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$, en x = 1.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función derivada.

Ubicación temporal: Tras explicar la "Derivadas laterales. Continuidad y derivabilidad".

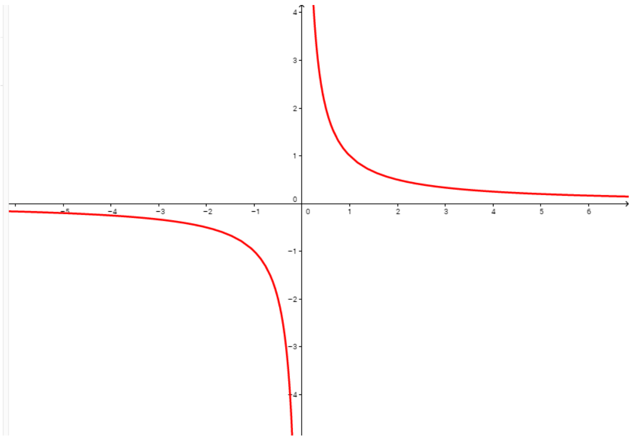
Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización del segundo apartado. El tercer apartado lo deja para que los alumnos lo realicen durante la clase, asistiendo a las posibles dudas que les puede surgir.

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la derivada de una función a trozos en un punto
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar colectiva e individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.	

Tarea 3

¿Cómo interpretas que la recta tangente a la curva de una función sea positiva?

a) Encuentra un punto en la que la tangente a la curva $y = x^2-1$ sea 4, e interpreta lo que le ocurre a dicha función en el entorno del punto.
b) La función $y = 1/x$ tiene como representación la siguiente gráfica:



¿Existe algún punto de esa función con derivada positiva? Razona tu respuesta mediante la representación.

Duración: 5 – 10 minutos.

Recursos: Ninguno especial.

Ubicación temporal: Al final de la clase.

Ejecución: Se propone un pequeño debate, poniendo en común las distintas ideas que se han expuesto en esa clase, con el objetivo de que los alumnos las contrapongan, discutan y trabajen ese día. Aquellos apartados que no se hayan trabajado en clase, quedan propuestos como tareas para casa.

Elementos de la tarea	Meta	Deducir el valor de la derivada de una función en un punto, usando la representación geométrica de la función.
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera colectiva e individualmente.
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.	

Tarea para casa

Tarea 4

Dada la función f : R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x < 1 \\ -(2x-3), & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ (x+3)^2, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Determina los puntos en los que la función es continua, y aquellos otros en que es derivable. Calcula la función derivada usando su definición.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función derivada.

Ubicación temporal: Tarea para casa.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase.

Elementos de la tarea	Meta	Interpretar el comportamiento local de una función
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada	

Tarea 5

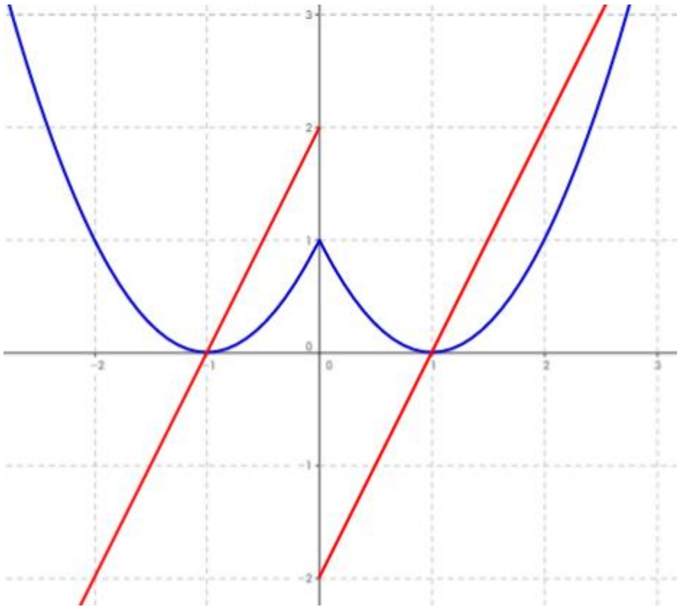
Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = (1-|x|)^2$ en el intervalo [-1,1].

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función derivada.

Ubicación temporal: Tarea para casa.

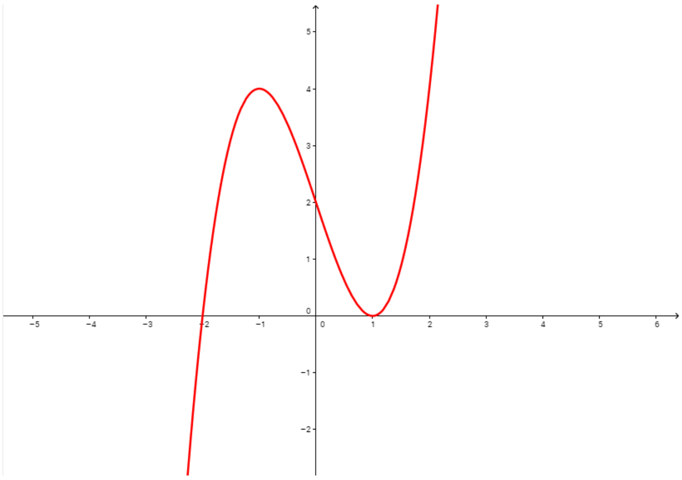
Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase.



<table>
<tr><td rowspan="5">Elementos de la tarea</td><td>Meta</td><td>Interpretar el comportamiento de una función en un intervalo</td></tr>
<tr><td>Operaciones</td><td>Función derivada</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td>Ampliación de cambios y relaciones</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td>Académico</td></tr>
<tr><td>Complejidad</td><td>Conexión</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Condiciones</td><td>Presentación</td><td>Redactado por escrito en papel</td></tr>
<tr><td>Comunicación
¿Cómo?
¿Cuándo?</td><td>Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido.
En la sesión 1.</td></tr>
<tr><td>Agrupamiento de alumnos</td><td>Tarea a realizar individualmente</td></tr>
<tr><td>Duración</td><td>10´ - 15´</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td colspan="2">Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada</td></tr>
</table>

Tarea 6

Dada la siguiente representación gráfica de una función:



a) Indica los puntos de la gráfica donde la derivada es 0

b) En x = 0, ¿es la derivada positiva o negativa?

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Ninguno especial.

Ubicación temporal: Tarea para casa.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase.

Elementos de la tarea	Meta	Interpretar el comportamiento local de una función
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar comportamiento de la derivada puntual en función de la representación gráfica de la función.	

Sesión 2: La función derivada

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	
Interpretación geométrica de la derivada: Recta normal y tangente a una curva en un punto	*20´ - 25´*
Resolución tarea 7	*10´- 15´*
La función derivada	*15´- 20´*
Resolución tarea 8	*5´ - 10´*
Resolución tarea 9	*5´ - 10´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Interpretación geométrica de la variación instantánea. Rectas tangente y normal a una curva.

2. La función derivada.

Objetivos:

Expresar verbalmente y representar geométricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.

Emplear la interpretación de derivada para el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente.

Utilizar programas de software para calcular gráficamente la derivada de una función en un punto.

Recursos:

Se les proporcionará a los alumnos un link de descarga de una applet de Geogebra, para el cálculo por aproximación de la recta tangente en un punto de una función y otra para representar gráficamente las rectas tangente y normal a una función. Trabajaremos la forma de usarla durante el desarrollo de las tareas de clase.

Por último se trabajará también con una applet de representación gráfica de una función y su función derivada.

Links de descarga:

http://www.geogebra.org/m/pFcBuBrj?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Frecta%2Btangente%2Fmaterials%2F

http://www.geogebra.org/m/SZaTQWT4?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Frecta%2Btangente%2By%2Bnormal%2Fmaterials%2F

http://www.geogebra.org/m/J2Mq5XYj?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bderivada%2Fmaterials%2F

Tarea 7

Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en las siguientes curvas:

- $f(x) = 2x^2-1$, en los puntos de abscisas $x = 3$ y $x = -2$.
- $f(x) = x^3$, en los puntos de abscisas $x = -4$ y $x = 1$.

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las rectas tangentes y normal.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar la "recta tangente y normal a una función en un punto"

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización del segundo apartado, donde ejerce de guía para el alumnado.

Tarea 8

Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 2x+1$

$h(x) = \sqrt{x}$

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función y su correspondiente función derivada.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar la "función derivada"

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización del segundo apartado, donde ejerce de guía para el alumnado. El tercer apartado queda propuesto para la realización individual de los alumnos en clase, donde el profesor asistirá a las posibles dudas que tengan los alumnos.

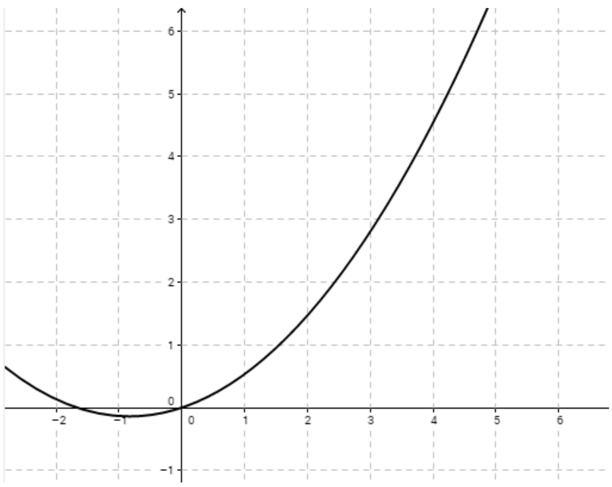
Tarea 9

Teniendo en cuenta que el desplazamiento de un vehículo viene dado por la ecuación $s(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{5}t^2$, donde t se mide en segundo y s es el espacio recorrido en metros.

a) ¿Cuál es la velocidad media del vehículo entre los segundo 1 y 4 de recorrido?

b) Calcula la velocidad instantánea en los instantes t = 1,3 y 5.

Comprueba tus soluciones usando la representación gráfica de la función.



Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las rectas tangentes y normal.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio al final de la clase.

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización del segundo apartado, donde ejerce de guía para el alumnado.

Tarea para casa

Tarea 10
Dada la curva $f(x) = x^2 + 3$, halla el punto donde la recta normal es paralelo al eje de ordenadas.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso del Geogebra para representar la función y su correspondiente recta normal.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase, acerca de las rectas tangente y normal.

Tarea 11
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en los puntos que se indican:

$f(x) = x^2+3x-3$, en el punto de abscisa $x = 2$

$f(x) = e^{2x+3}$, en el punto de abscisa $x = 4$

$f(x) = \ln(x+1)$, en el punto de abscisa $x = 0$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso del Geogebra para representar la función y su correspondiente recta tangente.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase, acerca de las rectas tangente y normal.

Tarea 12
Se considera la función $f(x) = 2x^2 - 3x + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor de “a”, tal que la recta tangente a la función en el punto con abscisa “a” pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m, para que la recta tangente sea paralela al eje de abscisas en el punto con $x=10$.

Duración: 10 – 15 minutos.

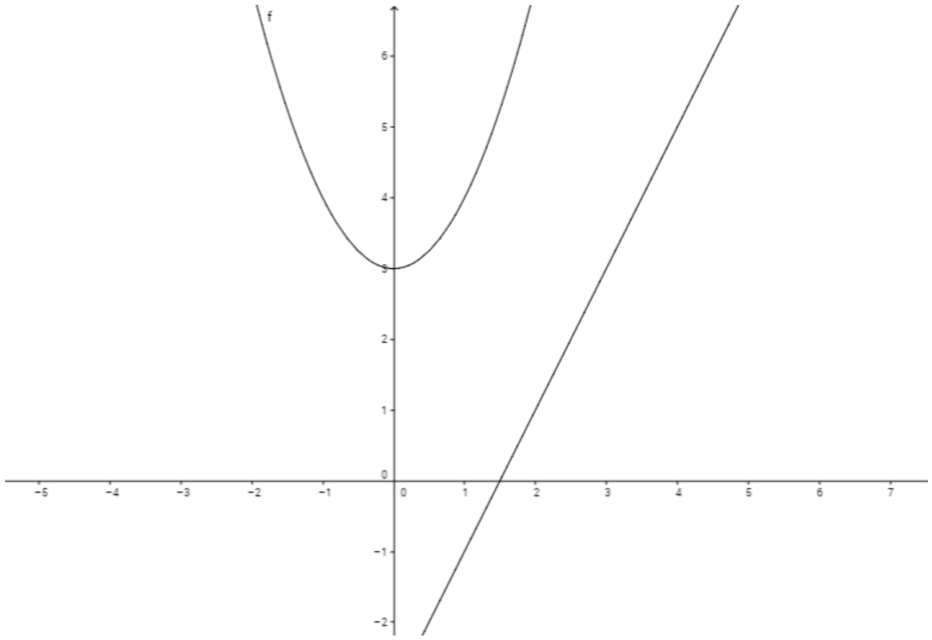
Recursos: Uso del Geogebra para representar la función y su correspondiente recta tangente.

Nivel de complejidad: Reflexión.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase, acerca de las rectas tangente y normal.

Tarea 13, opcional

Encuentra la recta tangente a la función f(x) = x^2+3, y que sea paralela a la recta de ecuación 2x-y=3.



Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso del Geogebra para representar la función y su correspondiente recta tangente.

Nivel de complejidad: Reflexión.

Ejecución: El alumno realiza la tarea usando los conocimientos que ha adquirido en la clase, acerca de las rectas tangente y normal.

Sesión 3: Álgebra de derivadas: Suma, producto y cociente de funciones.

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Reglas de derivación: Función constante, potencia, exponencial, logarítmicas, trigonométricas y arco.	*10´ - 15´*
Álgebra de derivadas: Número por una función, suma, producto y cociente de funciones	*10´ - 15´*
Resolución tarea 14	*15´ - 20´*
Resolución tarea 15	*10´- 15´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Derivadas de funciones elementales.

2. Reglas de derivación: Función constante, potencia, exponencial, logarítmicas, trigonométricas y arco.

3. Álgebra de derivadas: Número por una función, suma, producto y cociente de funciones.

Objetivos:

Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas.

Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.

Recursos:

Se proporcionará a los alumnos un link de descarga de una applet de Geogebra, para la representación de funciones y de su correspondiente función derivada. Trabajaremos la forma de usarla durante el desarrollo de las tareas de clase.

Tarea 14
Calcular las derivadas de:

$f(x) = 3x^3 + 2\sqrt{x}-1$ $f(x) = \log_3 x - 3^x$ $f(x) = \log_5 x+4^x$

$f(x) = \frac{2}{1+x} + e^{x+3}$ $f(x) = x^4 + 2\frac{x}{e^{x+1}}$ $f(x) = x^3- \operatorname{sen}x$

Duración: 15 – 20 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “reglas de derivación” y “álgebra de derivadas”

Ejecución: El profesor realiza los primeros tres apartados en la pizarra, usando todo lo explicado en el punto, y pide la colaboración de los alumnos para la realización de los últimos apartados, donde ejerce de guía para el alumnado.

Tarea 15
Calcular las derivadas de:

$f(x) = \sqrt[5]{x+4}$ $f(x) = \frac{x^3+3x+7}{e^x-3x}$ $f(x) = \frac{e^x+3}{lnx}$

$f(x) = (x^2-3x).lnx$ $f(x) = \frac{x^2+lnx}{\sqrt[4]{x}}$ $f(x) = x^2+\frac{cosx+1}{tagx}$

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “reglas de derivación” y “álgebra de derivadas”

Ejecución: El profesor propone la tarea para que los alumnos la realicen en clase. El profesor asiste a las posibles dudas que puedan tener los alumnos.

Tarea para casa

Tarea 16

Calcular las derivadas de:

f(x) = $\frac{x+lnx}{5x-4}$ f(x) = $\frac{3x-1}{x^3}$ f(x) = x.e^x

f(x) = 2x.$\sqrt[4]{x}$ f(x) = $\frac{x^3-3x}{e^x-\sqrt{x+3}}$ f(x) = senx.$\frac{2x+tagx}{senx}$

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza el ejercicio en casa, con los conocimientos obtenidos en la clase acerca de las reglas de derivación.

Sesión 4: Reglas de derivación I

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Producto de funciones y cociente de funciones (repaso)	*5´- 10´*
Resolución tarea 17	*10´- 15´*
Reglas de derivación: Regla de la cadena	*10´ - 15´*
Resolución tarea 18	*20´ - 25´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Álgebra de derivadas: Producto y cociente de funciones (repaso).

2. Álgebra de derivadas: Regla de la cadena.

Objetivos:

Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas.

Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Usar las reglas de derivación para hallar la función derivada de una función dada.

Ejercicios de clase

Tarea 17
Calcular las derivadas de:

$f(x) = (x^2-3x).\ln x$ $\quad$ $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{5x+2}$

$f(x) = 2x.\text{sen}x$ $\quad$ $f(x) = \frac{e^x+3x}{x-\ln x}$

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras hacer un repaso a la derivación del producto y cociente de funciones.

Ejecución: El profesor propone la realización durante la clase de los distintos apartados y mientras se encarga de la resolución de dudas que puedan tener los alumnos. Después los alumnos que lo deseen pueden realizar el ejercicio en la pizarra.

Tarea 18
Calcular las derivadas de:

f(x) = $\sqrt{e^x + \ln(x+1)}$

f(x) = $\frac{e^x - lnx}{2\sqrt[3]{x+3x^2}}$

f(x) = $(x^3+2x-\ln x).(e^{x^2}+1)^4$

f(x) = ln(1-3x)

f(x) = $\frac{x+senx}{tagx}$

f(x) = $(\frac{1}{x} + x^4).e^{x+1}$

Duración: 20 – 25 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar la regla de la cadena.

Ejecución: El profesor propone la realización durante la clase de los distintos apartados y mientras se encarga de la resolución de dudas que puedan tener los alumnos. Después los alumnos que lo deseen pueden realizar el ejercicio en la pizarra.

Tareas para casa

Tarea 19
Calcular las derivadas de:

f(x) = $(3\sqrt[3]{x} - 2x)^4$

f(x) = $3^{x^2+senx^2}$

f(x) = ln $(3x^4$-senx)

f(x) = arcsen$(x^3.\ln(x+2))$

f(x) = $\sqrt[3]{x^4 - cos\sqrt{x+1}}$

f(x) = ln $\frac{x+1}{e^x}$

Duración: 15 – 20 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las funciones y sus correspondientes funciones derivadas.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza el ejercicio en su casa, con los conocimientos obtenidos acerca de las reglas de derivación.

Sesión 5: Reglas de derivación II

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Reglas de derivación: Regla de la cadena (repaso)	*5´- 10´*
Resolución tarea 20	*10´- 15´*
Evaluación: Reglas de derivación	*30´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Álgebra de derivadas: Producto y cociente de funciones (repaso).

2. Álgebra de derivadas: Regla de la cadena.

Objetivos:

Discernir entre función derivada y derivada en un punto, e identificar bajo qué condiciones es posible el cálculo de derivadas sucesivas.

Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.

Ejercicios de clase

Tarea 20

Calcular las derivadas de:

f(x) = ln $\frac{2x+1}{x}$.senx

f(x) = ln(sen($\sqrt{x}$))

f(x) = $3^{x^2} - (tagx.x^2)$

f(x) = $\frac{senx}{\sqrt{x}}$

f(x) = $\frac{arcsenx}{x^2}$

f(x) = $\sqrt{arcsen(x).\sqrt[3]{x}}$

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las rectas tangentes y normal.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio t la regla de la cadena.

Ejecución: El profesor propone la realización durante la clase de los distintos apartados y mientras se encarga de la resolución de dudas que puedan tener los alumnos. Después los alumnos que lo deseen pueden realizar el ejercicio en la pizarra.

Examen: Reglas de derivación

Calculas las derivadas de:

$f(x) = (2x^2 - sen(2x+1)).lnx$

$f(x) = \frac{3x^2-4}{sen(\sqrt{x})}$.

$f(x) = ln(\sqrt[3]{2x+3}) - sen(\sqrt{x})$

$f(x) = tag(\frac{2x}{e^x})$

$f(x) = cos(tag(\sqrt{x}))$

$f(x) = ln(tag(arcsen(x)))$

Duración: 30 minutos

Recursos: Ninguno especial.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor propone la realización de esta prueba para la segunda mitad de la clase.

Ejecución: Los alumnos realizan el examen manteniendo un clima de silencio y respeto adecuado.

Foco 2: Propiedades de la derivada

Sesión 6: Monotonía de funciones

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Funciones monótonas. Funciones con derivada no nula	*5´- 10´*
Funciones con derivada nula en un punto. Intervalos de monotonía	*10´ - 15´*
Resolución tarea 21	*10´ - 15´*
Resolución tarea 22	*10´ - 15´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Funciones monótonas. Funciones con derivada no nula.

2. Funciones con derivada nula en un punto.

Objetivos:

Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información proporcionada por su función derivada.

Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.

Ejercicios de clase

Tarea 21

Estudiar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones

$f(x) = x^2+3$ $f(x) = x^3+3x-2$ $f(x)=e^x + 10x$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “funciones monótonas” y “los intervalos de monotonía”.

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, y propone los siguientes dos apartados para su realización en clase. El profesor asistirá las posibles dudas y los alumnos que están interesados corregirán los ejercicios en la pizarra.

Tarea 22

Estudia continuidad y los intervalos de monotonía de las siguientes funciones, en todo R:

f(x) = x+$\frac{4}{x}$ f(x) = $\frac{2x-1}{x^2+2x+1}$ f(x) = $\frac{3x^4}{2x.(x^2-1)}$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar funciones.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar la regla de la cadena.

Ejecución: El profesor propone la realización durante la clase de los distintos apartados y mientras se encarga de la resolución de dudas que puedan tener los alumnos. Después los alumnos que lo deseen pueden realizar el ejercicio en la pizarra.

Tareas para casa

Tarea 23

Estudiar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones

f(x) = $3x^2+3x-5$ f(x) = $4x^3+1$ f(x) = ln(x) +10x

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar funciones.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza en casa el ejercicio con los conocimientos que ha adquirido acerca del estudio de la monotonía de funciones.

Sesión 7: Puntos críticos y curvatura de una función

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Puntos críticos de una función	*10´ - 15´*
Resolución de las tarea 24	*10´ - 15´*
Resolución de las tarea 25	*5´ - 10´*
Curvatura de una función	*10´ - 15´*
Resolución de la tarea 26	*10´ - 15´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Puntos críticos de una función.

2. Curvatura de una función.

Objetivos:

Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.

Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.

Ejercicios de clase

Tarea 24
Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones

$f(x) = x^3-3x+6$ $\qquad$ $f(x) = \frac{2x-1}{5x+6}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x+1}$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “puntos críticos de una función”.

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, y propone los siguientes dos apartados para su realización en clase. El profesor asistirá las posibles dudas y los alumnos que estén interesados corregirán los ejercicios en la pizarra.

Tarea 25
Determina el valor del parámetro “a” para que el máximo de la función $-x2+ax-5$ sea igual a 6.

Duración: 5 – 10 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función, en función del parámetro “a”.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras realizarse en clase la tarea 22.

Ejecución: El profesor establece un pequeño debate acerca de la estrategia de resolución idónea del ejercicio. A continuación, se propone la realización del ejercicio en la pizarra con ayuda de los alumnos.

Tarea 26
Estudiar la curvatura de las siguientes funciones

$f(x)=x^3+3$ $\qquad$ $f(x)=x^2-3x+6$ $\qquad$ $f(x)=\frac{x}{5x-6}$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “curvatura de una función”.

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, y propone los siguientes dos apartados para su realización en clase. El profesor asistirá las posibles dudas y los alumnos que estén interesados corregirán los ejercicios en la pizarra.

Tarea 27

Determina el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2 - 4x$ en el intervalo [-3,2].

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza la tarea en su casa, usando lo aprendido acerca de puntos críticos de funciones.

Tarea 28

Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x)=\operatorname{sen}x.\ln x$ en R.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reproducción.

Ejecución: El alumno realiza la tarea en su casa, usando lo aprendido acerca de puntos críticos de funciones.

Foco 3: Aplicaciones de la derivada.

Sesión 8: Optimización y construcción de funciones

Repaso de la clase anterior y resolución de dudas en las tareas	*10´ - 15´*
Optimización de funciones	*5´ - 10´*
Resolución de las tareas 29, 30 y 31	*20´ - 25´*
Construcción aproximada de curvas	*10´ - 15´*
Resolución de la tarea 32	*10´ - 15´*
Tareas propuestas para la realización en casa	

Contenidos:

1. Optimización de funciones

2. Construcción aproximada de curvas.

Objetivos:

Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada.

Resolver problemas de optimización mediante el cálculo de puntos críticos de la función en su dominio o en un intervalo determinado.

Recursos:

Se proporcionará a los alumnos dos links de descarga applets de Geogebra, para representar la optimización de funciones. Trabajaremos la forma de usarla durante el desarrollo de las tareas de clase.

Links de descarga:

http://www.geogebra.org/m/zz3rkMS3?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunctions%2Boptimizations%2Fmaterials%2F

http://www.geogebra.org/m/KZcqsADT?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunctions%2Boptimizations%2Fmaterials%2F

Tarea 29

Se quieren construir unos botes de forma cilíndrica que tengan 10 litros de capacidad. Calcula sus dimensiones para que el gasto en material sea mínimo.

Duración: 5 – 10 minutos.

Recursos: Ninguno especial.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “optimización de funciones”.

Ejecución: El profesor realiza el ejercicio en la pizarra, mientras explica cuáles son los diferentes pasos a llevar a cabo en la resolución.

Tarea 30

Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de 30 cm de radio.

Duración: 5 – 10 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar las distintas funciones posibles y cuál es su óptima.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio la realización de la tarea 27.

Ejecución: El profesor deja a los alumnos que resuelvan el ejercicio mientras asiste a posibles dudas, y posteriormente representa la solución con Geogebra.

Tarea 31

Divide un segmento de 10 cm de longitud, en dos partes de manera que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Ninguno especial.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras la realización de la tarea 28.

Ejecución: El profesor deja a los alumnos que resuelvan el ejercicio mientras asiste a posibles dudas. El alumno que esté interesado, puede resolver la tarea en la pizarra.

Tarea 32

Representa aproximadamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3+2x^2-x+3$ b) $f(x) = x^2+1$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \text{sen}(2x-\pi)$

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ubicación temporal: El profesor plantea el ejercicio tras explicar “construcción aproximada de curvas”.

Ejecución: El profesor realiza el primer apartado en la pizarra, y propone los siguientes tres apartados para su realización en clase. El profesor asistirá las posibles dudas y los alumnos que estén interesados corregirán los ejercicios en la pizarra.

Tareas para casa

Tarea 33

Halla dos números cuya suma sea 36, y su producto sea el mayor posible.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ejecución: Los alumnos realizan la tarea en casa, con los conocimientos obtenido acerca de optimización de funciones.

Tarea 34

Halla las dimensiones de una caja de $72cm^3$, sabiendo que tiene 2 cm de altura, de manera que la cantidad de material empleado sea mínima.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Conexión.

Ejecución: Los alumnos realizan la tarea en casa, con los conocimientos obtenido acerca de optimización de funciones.

Tarea 35, opcional

El dueño de un bar ha comprobado con el paso de los años, que al precio de 80 céntimos de euro, sirve 384 cafés al día. Además, por cada 5 céntimos que aumenta el precio, sirve 8 cafés menos al día. Si cada café le cuesta 10 céntimos de euro, ¿a qué precio sacará el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio que obtiene con su venta?

Duración: 15 – 20 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Nivel de complejidad: Reflexión.

Ejecución: Los alumnos realizan la tarea en casa, con los conocimientos obtenido acerca de optimización de funciones.

Sesión 9: Ejercicios de repaso

En esta sesión repasaremos todas las posibles dudas que pudiera haber tanto en la teoría como en los ejercicios realizados a lo largo de la unidad didáctica. También quedarán planteadas unas tareas en caso de que hubiera suficiente tiempo para realizarlas.

Ejercicios de clase

Tarea 36

Dada la función f: R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x)+\cos(x), & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{sen(x)}{x}, & \text{si } 1 < x < \pi \\ -\cos(x), & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

Determina si es derivable en todos los puntos de su dominio.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Ubicación temporal: -.

Ejecución: El profesor plantea a los alumnos cómo resolver el ejercicio, y determina los principales pasos a seguir sin detenerse en los cálculos.

Tarea 37

Consideramos la función f: R → R definida como $f(x) = \frac{2x-1}{1+x}$. Estudia su derivabilidad, y calcula su primera y segunda derivada.

Duración: 10 – 15 minutos

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Ubicación temporal: -.

Ejecución: El profesor plantea a los alumnos cómo resolver el ejercicio, y determina los principales pasos a seguir sin detenerse en los cálculos.

Tarea 38

Determina los valores para a y b, de la función $f(x)=ax^2+bx+2$, teniendo en cuenta que la recta tangente en el punto con abscisa x=1, es la recta y=-2x.

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Ubicación temporal: -.

Ejecución: El profesor plantea a los alumnos cómo resolver el ejercicio, y determina los principales pasos a seguir sin detenerse en los cálculos.

Tarea 39

Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos, y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$f(x) = 3x^4-2x^2+5$ $\qquad$ $f(x) = e^{senx}$ $\qquad$ f(x) = ln(senx)

Duración: 10 – 15 minutos.

Recursos: Uso opcional de Geogebra para representar la función.

Ubicación temporal: -.

Ejecución: El profesor plantea a los alumnos cómo resolver el ejercicio, y determina los principales pasos a seguir sin detenerse en los cálculos.

***Sesión 10:* Sesión de evaluación**

En esta sesión se realizará un examen escrito de una hora de duración en el que se preguntará acerca de los contenidos de la unidad didáctica que se han impartido en las anteriores sesiones.

6. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El proceso de evaluación conforma el último bloque de esta unidad didáctica, además de ser uno de los elementos fundamentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para que dicho proceso efectivo es necesario que como profesor analice qué aspectos de esta unidad son aquellos en que nos vamos a centrar para la evaluación.

Son de importancia las herramientas que se utilicen para recoger la información de manera sistemática y regular, con el fin de poder valorar el nivel de dominio por parte del alumno de la materia que se imparte en esta unidad.

Para describir el método de evaluación, voy a repasar los criterios de evaluación establecidos en esta unidad para, posteriormente, detallar con precisión los instrumentos de evaluación que utilizaré y sus criterios de calificación asociados. Con ello, obtendré una valiosa y eficaz información acerca del nivel de adquisición de los contenidos y destrezas por parte del alumnado.

6.1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que se establecen en el Anexo I del R.D. 1105/2014 para esta unidad didáctica son:

Criterios de evaluación

- Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.

- Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización.

Estándares de aprendizaje evaluables

3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.

3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

Los criterios de evaluación específicos que he establecido para nuestra unidad didáctica son los siguientes:

Criterios de evaluación específicos de la unidad didáctica

Criterios de evaluación relativos al concepto de derivada

Comprender el concepto de derivada en un punto y en un intervalo mediante su interpretación gráfica.

Comprobar si una función satisface las condiciones de derivabilidad para un punto dado.

Calcular la recta tangente y normal a una curva en un punto dado, usando la interpretación geométrica de su derivada en dicho punto.

Calcular la representación gráfica de la función derivada, mediante el uso de programas de software.

Criterios de evaluación relativos a las propiedades de la derivada

Comprobar condiciones bajo las cuáles se pueden determinar las derivadas sucesivas a una función dada.

Probar las propiedades analíticas que cumple una determinada función derivable en un intervalo.

Conocer y aplicar correctamente las reglas de derivación inmediata para funciones elementales, y las de operación de funciones y regla de la cadena para funciones compuestas.

Describir el comportamiento de la gráfica de una función, mediante el estudio de su monotonía, convexidad identificación de sus extremos relativos, mediante el uso de derivadas de primer y segundo orden.

Criterios de evaluación relativos a las aplicaciones de la derivada

Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, interpretación gráfica y propiedades analíticas en la resolución de problemas que requieran del cálculo de derivadas.

Representar aproximadamente la gráfica de una función, mediante la información proporcionada por sus derivadas de primer y segundo orden.

Aplicar la interpretación geométrica y el cálculo de la función derivada en un intervalo, para la resolución de problemas de optimización.

Usar el cálculo de la función derivada para el estudio de fenómenos naturales, sociales y tecnológicos.

6.2. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

El amplio espectro de aspectos que como profesor he de evaluar, junto a su diferente naturaleza y complejidad, hace que no sea posible evaluar su totalidad utilizando el mismo tipo de prueba. Para ello adopto la estrategia de realizar una evaluación combinada de la unidad didáctica, con criterios e instrumentos formativos y sumativos.

Para ello, será necesario tomar notas acerca de aspectos significativos de los alumnos y de la consecución de objetivos y competencias previstas en clase, unido a una prueba escrita final que permita valorar el grado de adquisición de los contenidos de la materia impartida en la unidad.

A continuación, describo en este apartado los diferentes instrumentos de evaluación con los cuales la llevaremos a cabo en la unidad didáctica:

Examen

Consistirá en una prueba escrita en las que se preguntará al alumno acerca de distintas cuestiones pertenecientes a cada uno de los focos conceptuales de nuestra unidad didáctica. Será el instrumento de evaluación con mayor peso en la nota final.

Observación directa

Dentro de este apartado serán varias las capacidades y conductas que vamos a evaluar:

Comportamiento: Se tendrá en cuenta el respeto a los compañeros y al profesor, y la actitud respecto a la materia que se imparte en la unidad.

Participación: En la corrección de ejercicios en la pizarra, y planteamiento de dudas por la realización de ejercicios propuesto para casa.

En cuanto a la ponderación que realizaremos de los instrumentos de calificación, será la siguiente:

Examen: 75% = 20% primer examen + 55% segundo examen

Observación directa: 25%

6.3. ETAPAS DE EVALUACIÓN

Etapas	Focos	Sesiones	Contenidos	Tareas
Inicio	Concepto de derivada	1	Propiedades locales y propiedades de una función en un intervalo. Derivada de una función en un punto. Derivadas laterales. Relaciones entre continuidad y derivabilidad.	1-6
		2	Interpretación geométrica de la variación instantánea. Rectas tangente y normal a una curva. La función derivada.	7-13
	Propiedades de las derivadas	3	Derivadas de funciones elementales. Reglas de derivación: Función constante, potencia, exponencial, logarítmicas, trigonométricas y arco. Álgebra de derivadas: Número por una función, suma, producto y cociente de funciones.	14-16
Seguimiento		4	Álgebra de derivadas: Producto y cociente de funciones (repaso). Álgebra de derivadas: Regla de la cadena.	17-19
		5	Álgebra de derivadas: Regla de la cadena (repaso) Prueba escrita: Reglas de derivación	20
		6	Funciones monótonas. Funciones con derivada no nula. Funciones con derivada nula en un punto.	21-23
	Aplicaciones de la derivada	7	Puntos críticos de una función. Curvatura de una función.	24-28
		8	Optimización de funciones Construcción aproximada de curvas	29-35
Final	Repaso	9	Ejercicios de repaso	36-39
	Examen	10	Sesión de evaluación	

6.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

En esta unidad didáctica se continúa el trabajo realizado a lo largo de los cursos anteriores con funciones, dentro del bloque de análisis. Todo lo aprendido acerca de continuidad, límite y representación gráfica de funciones es fundamental para el desarrollo de esta unidad.

Es por ello que considero necesario la realización de una evaluación inicial en la que evaluar los conocimientos previos del alumno, necesarios para el seguimiento de esta unidad didáctica.

Esta evaluación se realiza al principio del curso académico, para conocer el nivel del alumno en las distintas ramas de la asignatura, para determinar el punto de partida donde iniciar la unidad didáctica.

Con esto, el principal objetivo es repasar aquello que los alumnos recuerdan, y comprobar si el contenido de cursos anteriores se ha asimilado satisfactoriamente.

En el bloque de análisis de la evaluación inicial, se plantean las siguientes cuestiones:

1. Dada la parábola $f(x) = x^2-3x+2$, halla su vértice y los puntos de corte con el eje x y el eje y.

2. Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$

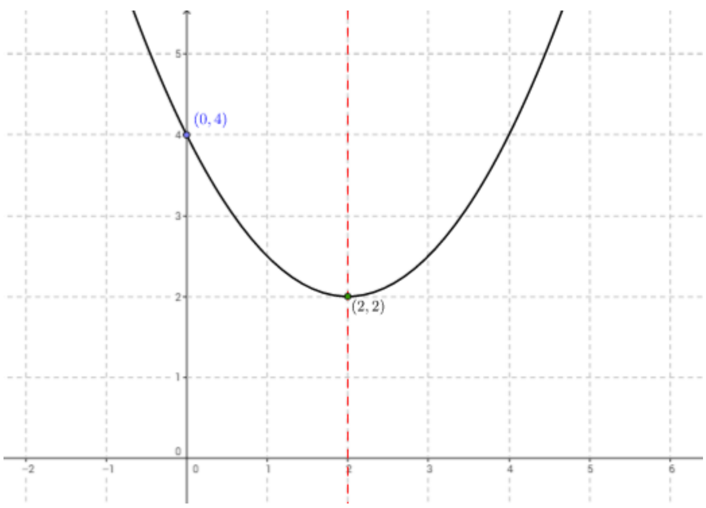
3. Dada la función f: R → R, definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13}{3} - x, si\ x < 1 \\ \frac{2}{3}x + 3, si\ 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4, \ \ si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Halla f(0), f(1) y f(3).

¿Es la función continua en todos los puntos de su dominio?

4. Determina los parámetros a y b para los que la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, tiene la siguiente representación gráfica:



6.5 EXAMEN

(2 puntos) Sea f la función definida para $x \neq 5$ por $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{10-2x}$

1. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.
2. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f.
3. Realiza un esbozo de la gráfica.

(1,5 puntos) Calcula las derivadas de las siguientes funciones

$f(x) = tag\,(e^{2x+1})$ $\qquad$ $g(x) = arcsen(x+1).ln(3x+1)$ $\qquad$ $h(x) = e^{arctg(x)}$

(2 puntos) Se sabe que la función f: $(-\infty,1) \rightarrow \Re$ definida como:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}-3x & si\ x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & si\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio. Halla los valores para a y b que lo verifican.

(1,5 puntos) De todos los rectángulos de perímetro 25 m, determina las dimensiones de aquel cuya diagonal es menor.

(2 puntos) Halla los coeficientes a, b y c de la función definida por

$$f(x)= 2x^3 - ax^2 + 2bx -3c$$

sabiendo que:

1. Presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa x=2
2. La recta tangente en el punto de abscisa x=1 es y= 6-8x

(1 punto) Considera la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x)=2x^2-5x+12$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

1

Enunciado del ejercicio

Sea f la función definida para $x \neq 5$ por $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{10-2x}$

1. Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.
2. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f.
3. Realiza un esbozo de la gráfica.

Foco conceptual
Aplicaciones de la derivada

Objetivos
Identificar las propiedades analíticas de una función derivable y ejemplificar propiedades que cumple y que no cumple la derivada de una función.

Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.

Criterios de evaluación
Probar las propiedades analíticas que cumple una determinada función derivable en un intervalo.

Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, interpretación gráfica y propiedades analíticas en la resolución de problemas que requieran del cálculo de derivadas.

Complejidad
Conexión

2

Enunciado del ejercicio

Calcula las derivadas de las siguientes funciones

$f(x) = \text{tag}\,(e^{2x+1})$ $\quad$ $g(x) = \text{arcsen}(x+1).\ln(3x+1)$ $\quad$ $h(x) = e^{\text{arctg}(x)}$

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivo
Usar las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función dada.

Criterios de evaluación
Conocer y aplicar correctamente las reglas de derivación inmediata para funciones elementales, y las de operación de funciones y regla de la cadena para funciones compuestas.

Complejidad
Reproducción

3

Enunciado del ejercicio
Se sabe que la función f: $(-\infty,1) \rightarrow \Re$ definida como:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}-3x & si\ x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & si\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio. Halla los valores para a y b que lo verifican.

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivos
Justificar si una función es o no derivable en un punto, o en un intervalo, aplicando las condiciones de derivabilidad.

Criterios de evaluación
Comprobar si una función satisface las condiciones de derivabilidad para un punto dado.

Complejidad
Reflexión

4

Enunciado del ejercicio
De todos los rectángulos de perímetro 25 m, determina las dimensiones de aquel cuya diagonal es menor.

Foco conceptual
Aplicaciones de la derivada

Objetivos
Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas.

Criterios de evaluación
Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, interpretación gráfica y propiedades analíticas en la resolución de problemas que requieran del cálculo de derivadas.

Complejidad
Reflexión

5

Enunciado del ejercicio
Halla los coeficientes a, b y c de la función definida por

$$f(x)= 2x^3 - ax^2 + 2bx -3c$$

sabiendo que:

1. Presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa x=2
2. La recta tangente en el punto de abscisa x=1 es y= 6-8x

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivos
Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.

Criterios de evaluación
Calcular la recta tangente y normal a una curva en un punto dado, usando la interpretación geométrica de su derivada en dicho punto.

Complejidad
Conexión

6

Enunciado del ejercicio
Considera la función f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x)=2x^2-5x+12$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Foco conceptual
Concepto de derivada

Objetivos
Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente mediante interpretación geométrica de la derivada.

Criterios de evaluación
Calcular la recta tangente y normal a una curva en un punto dado, usando la interpretación geométrica de su derivada en dicho punto.

Complejidad
Conexión

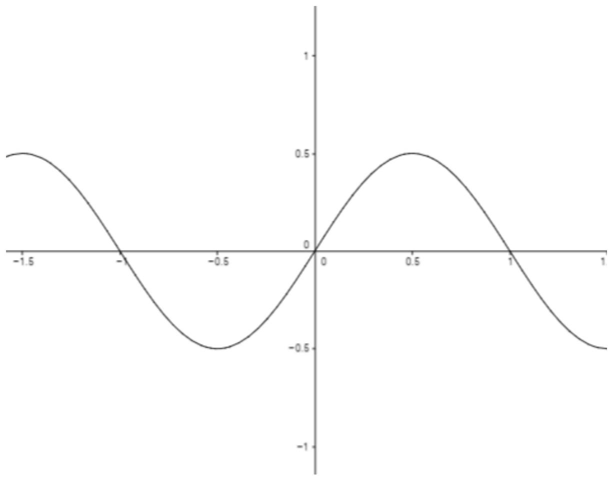
7. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

A lo largo de esta unidad didáctica, se han propuesto distintas tareas que abarcan los distintos focos conceptuales con diferentes niveles de complejidad. Unido a ellas, también quedan propuestas unas tareas de refuerzo con objeto de que aquellos alumnos que muestren dificultades con la asimilación del contenido, puedan superar satisfactoriamente la evaluación. También se proponen unas tareas de ampliación para aquellos alumnos que muestren mejores capacidades y una menor dificultad con la materia tratada, y así puedan profundizar en los contenidos de la unidad didáctica que estamos trabajando.

7.1. TAREAS DE REFUERZO

Concepto de derivada

La función y = sen(πx), tiene la siguiente representación gráfica:



¿Existe algún punto de esa función con derivada positiva en el intervalo [-1,1]? Razona tu respuesta mediante la representación.

Elementos de la tarea	Meta	Deducir el valor de la derivada de una función en un punto, usando la representación geométrica de la función.
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera colectiva e individualmente.
	Duración	5´ - 10´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.	

Dada las siguientes funciones, halla la ecuación de la recta tangente en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^3+2x-1$ en los puntos de abscisas x = 1, 3, 5,-1.

b) $f(x) = 2x^2+3$ en los puntos de abscisas x = -4, 3, 7, 10.

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la recta tangente a una función en un punto
	Operaciones	Derivación
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 2.
	Agrupamiento de alumnos	De manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Emplear la interpretación de la derivada para el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente	

Propiedades de la derivada

Estudia los intervalos de monotonía de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^2+3x-3$

b) $f(x) = 3x^3+4x$

c) $f(x) = e^{2x}+1$

Elementos de la tarea	Meta	Estudiar los intervalos de monotonía
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 6.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada	

Aplicaciones de la derivada

Dada las funciones f(x) = $5x^3-3x^2+1$, g(x) = $3x^2-2x$ y h(x) = (x-2).(x+3).(x+1) en el intervalo [-10,10] calcula:

a) Los puntos de corte con los ejes.

b) Los máximos y mínimos relativos.

c) Los máximos y mínimos absolutos.

Elementos de la tarea	Meta	Estudiar los máximos y mínimos de la función
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 6.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada	

Estudia y representa gráficamente de manera aproximada, las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{|x+1|}{2x-3}$. b) f(x) = (x-2).(x+5) c) f(x) = $\frac{sen(x)}{x+4}$

Elementos de la tarea	Meta	Representación gráfica de funciones
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 8.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Usar la derivada como herramienta para la representación de funciones, determinando los intervalos de crecimiento y curvatura de la función dada	

7.2. TAREAS DE AMPLIACIÓN

Aplicaciones de la derivada

La función $f(t) = 5t+0,3t^2$, determina el espacio recorrido por un vehículo en metros, a los t segundos de pasar un radar. Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué velocidad llevaba el vehículo cuando alcanzó el radar?

b) Qué velocidad llevaba el vehículo a los 2,5 y 10 segundos de pasar el radar?

c) ¿Cuánto tiempo desde cruzar el radar, tardar en alcanzar los 100 km/h?

Elementos de la tarea	Meta	Obtener la velocidad media y la velocidad instantánea
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas	

Dada la función s = f(t), que determina el espacio recorrido en metros por un objeto en t segundos. Indica en los siguientes casos, la función velocidad y función aceleración:

a) $s = 2t^2-t+1$ b) $s = 3t^3+4t-2$ c) $s = 4t^3-2t^2+5t-2$

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la función velocidad y la función aceleración
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 2.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas	

Dado un depósito con forma de cilindro de 4 metros de radio se llena de un líquido a 250dm^3 por minuto.

a) ¿Qué altura alcanzará en el primer minuto? b) ¿Qué altura varía entre 2 y 4 minutos?

c) ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito?

Elementos de la tarea	Meta	Calcular altura que alcanza el líquido dentro del recipiente
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 8.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera individual
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas	

El crecimiento de una población (en meses) viene expresado por la siguiente función:

$$F(t) = \begin{cases} 10^3, \ 0 \leq t < 5 \\ (t-4)^{t^2-4t-4}.10^3, \ 5 \leq t \end{cases}$$

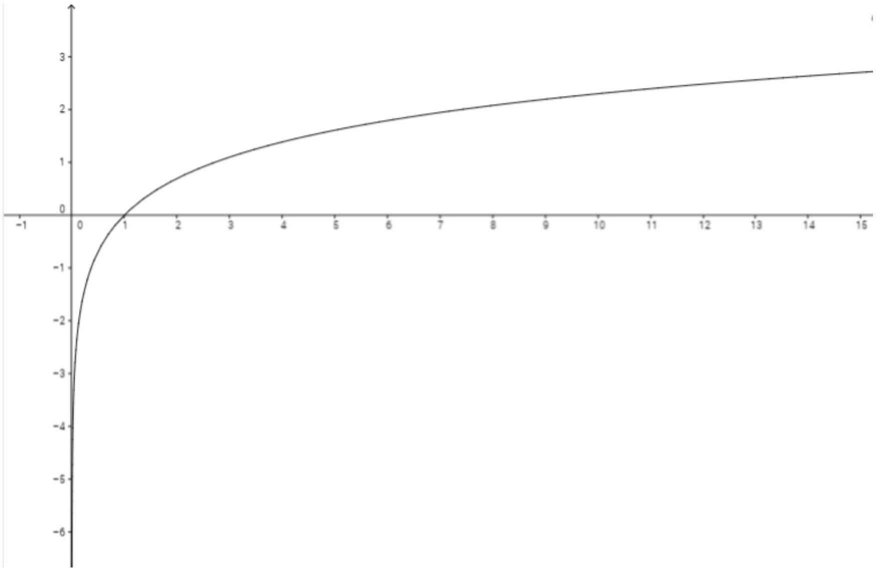
a) ¿Es la función derivable en todo su dominio?

b) Calcula, si es posible, la tasa de variación media en el intervalo [3,10]

c) Calcula la tasa de variación instantánea en t=5

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la tasa de variación instantánea y la tasa de variación media
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reproducción
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para comprender y lo explicado en clase. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera colectiva junto al profesor
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de derivadas	

La función y = ln(x) tiene como representación la siguiente gráfica:



Indica por qué no tiene ningún punto con derivada negativa, usando tanto la representación gráfica como su correspondiente función derivada.

Elementos de la tarea	Meta	Deducir el valor de la derivada de una función en un punto, usando la representación geométrica de la función.
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar de manera colectiva e individualmente.
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.	

Además, se mandarán pequeños proyectos para que los alumnos interesados trabajen con nuevas tecnologías de manera más profunda, con distintas applets que podremos encontrar en la página web de Geogebra.

8. BIBLIOGRAFÍA

Libros (docencia de las matemáticas)

Calviño, S., Sánchez, A. y Vigara L. (2010) Matemáticas II, Bachillerato a distancia. *CIDEAD (Centro para la innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia)*. Recuperado de http://www.matematicasonline.es/cidead/libros/2Bach_Mat_II/Libro_Bach_Mat2.pdf

González, L. y Valdés, A. (2015). Matemáticas II. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas%20II.pdf

Libros (historia de las matemáticas)

Boyer, C. (1959). *Historia del cálculo y su desarrollo conceptual.* Nueva York. Recuperado de https://archive.org/stream/TheHistoryOfTheCalculusAndItsConceptualDevelopment/Boyer-TheHistoryOfTheCalculusAndItsConceptualDevelopment_djvu.txt

Ponce, J.C. (2015). *Breve historia del concepto de derivada.* University of Queensland, Australia. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/270684035_Breve_historia_del_concepto_de_derivada

Taylor, B. (1715). *Methodus incrementorum directa & inversa.* Recuperado de http://www.17centurymaths.com/contents/taylorscontents.html

Normativa curricular

Ministerio de Educación y Ciencias. (3 de Enero de 2015). Boletín Real Decreto [1105-2014].

Ministerio de Educación y Ciencias. (3 de Mayo de 2015). Ley Orgánica de Educación [2-2006].

Web

Aguilar, G. (2014). Derivada puntual. Construcción dinámica. Recuperado de http://ggbtu.be/m112020

Applets acerca de la derivada. Recuperado de http://www.geogebra.org/search/perform/search/derivadas/materials/

Curbelo, M. (2015). Función derivada. Construcción dinámica. Recuperado de http://ggbtu.be/m1352415

Artículos

Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción de límite. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá. Recuperado de http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO_DE_LA_DERIVADA_SIN_LA%20NOCION_DEL_LIMTE.pdf

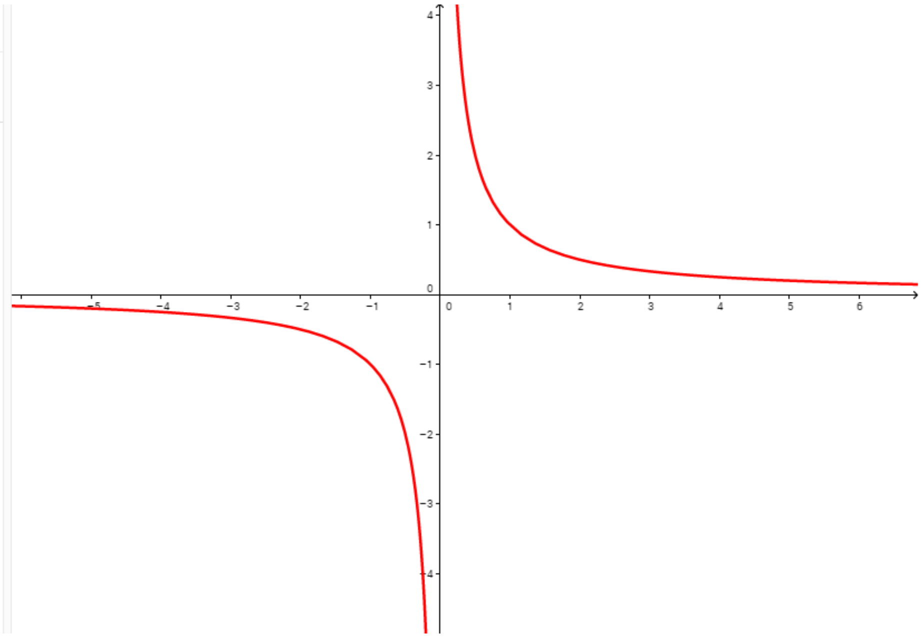
Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación matemática, 11 (2)*. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias, 24 (11).* Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/73534/84742

ANEXO. ANÁLISIS TAREAS

Sesión 1 – *Tarea*

¿Existe algún punto de la gráfica con derivada positiva? Razona tu respuesta



Elementos de la tarea	Meta	Interpretar el comportamiento local de una función
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 1.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada	

Sesión 2 - Tarea 6

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en los puntos que se indican:

f (x) = x^2+3x-3, en el punto de abscisa x = 2.

f(x) = e^{2x+3}, en el punto de abscisa x = 4.

f(x) = ln (x^2+1), en el punto de abscisa x = 0.

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la ecuación de la recta tangente
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 2, como ejercicio para realizar en casa.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Emplear la interpretación de la derivada para el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto y representarla gráficamente	

Sesión 3 – Tarea

Calcular las derivadas de:

f(x) = $3x^3 + 2\sqrt{x}$-1 f(x) = $\log_3 x - 3^x$ f(x) = $\log_5 x+4^x$

f(x) = $\frac{2}{1+x} + e^{x+3}$ f(x) = $x^4 + 2\,\frac{x}{e^{x+1}}$ f(x) = x^3- senx

Elementos de la tarea	Meta	Usar las reglas de derivación
	Operaciones	Derivadas
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio para reforzar en la práctica lo explicado en clase. En la sesión 3, tras explicar las reglas de derivación
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Usar las reglas de derivación para hallar la función derivada de una función dada	

Sesión 5 - *Tarea 16*

Calcular las derivadas de:

f(x) = ln $\frac{2x+1}{x}$.senx

f(x) = ln(sen($\sqrt{x}$))

f(x) = $3^{x^2} - (tagx.x^2)$

f(x) = $\frac{senx}{\sqrt{x}}$

f(x) = $\frac{arcsenx}{x^2}$

f(x) = $\sqrt{arcsen(x).\sqrt[3]{x}}$

Elementos de la tarea	Meta	Usar las reglas de derivación
	Operaciones	Derivadas
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio para reforzar en la práctica lo explicado en clase. En la sesión 5.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Usar las reglas de derivación para hallar la función derivada de una función dada	

Sesión 6 - Tarea

Estudiar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones

f(x) = $3x^2+3x-5$ f(x) = $4x^3+1$ f(x) = ln(x) +10x

Elementos de la tarea	Meta	Estudiar los intervalos de monotonía de las funciones dadas
	Operaciones	Función derivada
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Conexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio de entrenamiento para reforzar lo aprendido. En la sesión 3, como ejercicio para realizar en casa.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades analíticas para la resolución de problemas de cálculo de derivadas	

Sesión 9 – Tarea

El crecimiento de una población (en meses) viene expresado por la siguiente función:

$$F(t) = \begin{cases} 10^3, \ 0 \leq t < 5 \\ (t-4)^{t^2-4t-4}.10^3, \ \ 5 \leq t \end{cases}$$ a) ¿Es la función derivable en todo su dominio?

b) Calcula, si es posible, la tasa de variación media en el intervalo [3,10].

c) Calcula la tasa de variación instantánea en t = 5.

Elementos de la tarea	Meta	Calcular la tasa de variación media e instantánea
	Operaciones	Límite
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Académico
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio para reforzar en la práctica lo explicado en clase. En la sesión 4.
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	10´ - 15´
Objetivos	Interpretar geométricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto	

Sesión 10 – Tarea

El dueño de un bar ha comprobado con el paso de los años, que al precio de 80 céntimos de euro, sirve 384 cafés al día. Además, por cada 5 céntimos que aumenta el precio, sirve 8 cafés menos al día. Si cada café le cuesta 10 céntimos de euro, ¿a qué precio sacará el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio que obtiene con su venta?

Elementos de la tarea	Meta	Optimizar las ventas para obtener el máximo beneficio.
	Operaciones	Derivación
	Contenido	Ampliación de cambios y relaciones
	Contexto	Personal
	Complejidad	Reflexión
Condiciones	Presentación	Redactado por escrito en papel
	Comunicación ¿Cómo? ¿Cuándo?	Como ejercicio para reforzar lo aprendido en clase. En la sesión 10
	Agrupamiento de alumnos	Tarea a realizar individualmente
	Duración	5´ - 10´
Objetivos	Identificar y resolver problemas de optimización en situaciones de la vida real aplicando derivadas	